



Approche analytique modale pour la prévision vibratoire de plaques couplées à des sols : Applications ferroviaires

Loïc Grau

► To cite this version:

Loïc Grau. Approche analytique modale pour la prévision vibratoire de plaques couplées à des sols : Applications ferroviaires. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ISAL0113 . tel-01247585v2

HAL Id: tel-01247585

<https://theses.hal.science/tel-01247585v2>

Submitted on 16 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSA LYON

N° attribué par la bibliothèque
2015ISALO113

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA
Lyon)**

Spécialité : **Acoustique et vibrations**

préparée au laboratoire **Vibrations et Acoustique**

dans le cadre de l'École Doctorale **MEGA**

présentée et soutenue publiquement
par

Loïc GRAU

le 15-12-2015

Titre:

**Approche analytique modale pour la prévision vibratoire de
plaques couplées à des sols: Applications ferroviaires**

Directeur de thèse: **Bernard Laulagnet**
Encadrant industriel de thèse: **Denis Bozzetto**

Jury

Pr. Alain Le Bot,	Président du jury
Pr. François Gautier,	Rapporteur
Dr. Philippe Jean,	Rapporteur
Pr. Goran Pavic,	Examineur
Dr. Pierre-Etienne Gautier,	Examineur
Dr. Estelle Bongini,	Invité
Dr. Guillaume Coquel,	Invité
Mr. Sebastien Thomas,	Invité
Dr. Bernard Laulagnet,	Directeur de thèse
Mr. Denis Bozzetto,	Encadrant industriel de thèse

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON secretariat@edchimie-lyon.fr	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGODOUKIAN Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	M. Fabrice CORDEY Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.83.74 Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr fabrice.cordey@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 ^{er} et. Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 ^{er} et. mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 isavonb@dbmail.com

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Table des matières

Table des matières	iii
Table des figures	vii
Résumé	xiii
Abstract	xv
Publications	xvii
Introduction	1
1 Etat de l'art : l'interaction sol-structure	3
1 Introduction	4
2 La modélisation et la caractérisation des sols stratifiés	4
2.1 Les équations de Navier	4
2.1.1 Modèles 2D	5
2.1.2 Modèles analytiques 3D	6
2.1.3 Modèles numériques	6
2.2 La méthode SASW / MASW	7
2.2.1 Mesure de dispersion des ondes de surface-SASW	7
2.2.2 La méthode MASW	8
2.2.3 Inversion et obtention des caractéristiques mécaniques et géométriques du sol	10
3 Les vibrations de plaque en flexion	11
3.1 Les dalles de tramway	11
3.2 Les dalles de voies grande vitesse	12
3.3 Les modèles d'excitation des structures pour caractériser l'ef- fort injecté par le tramway sur la structure	13
4 L'interaction sol-structure et fluide-structure	13
4.1 Les modèles numériques du couplage sol-structure	14
4.2 Les modèles semi-analytiques du couplage sol-structure	15
4.3 Les modèles semi-analytiques pour le couplage fluide-structure	16
4.3.1 Le cas académique des structures bafflées	16
4.3.2 Couplage d'une plaque non bafflée	17
5 Synthèse de l'état de l'art et perspectives	18
5.1 La complexité du problème d'interaction sol-structure	18
5.2 Axes d'études originaux développés dans ce travail de recherche	19
2 Modélisation d'une plaque en vibration de flexion couplée au sol	23
1 Modélisation analytique d'une plaque en vibration de flexion couplée à un sol monocouche d'extension semi-infini	24
1.1 Modèle de vibration d'une plaque isotrope de dimension finie	24

1.2	Décomposition modale du déplacement de la plaque couplée au sol	26
1.3	Décomposition modale de l'effort	26
1.4	Modèle des vibrations d'un sol monocouche homogène	27
1.5	Obtention du système linéaire des amplitudes modales	32
1.6	Vitesse quadratique moyenne de plaque et niveau vibratoire à la surface du sol	34
1.6.1	Vitesse quadratique moyenne de plaque	34
1.6.2	Niveau vibratoire à la surface du sol	34
2	L'impédance intermodale de rayonnement vibratoire	35
2.1	Formulation du problème à partir des impédances intermodales de rayonnement vibratoire	35
2.2	Mise en évidence des phénomènes de masse modale ajoutée et de raideur modale ajoutée	37
2.2.1	Raideur modale de sol ajoutée	37
2.2.2	Masse modale de sol ajoutée	39
2.3	Identification des zones de raideur, de masse et d'amortissement ajoutées sur l'impédance intermodale	40
2.3.1	Normalisation de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire	40
2.3.2	Exemples d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée	41
2.4	Rôle de la fréquence critique	42
3	Résultats numériques	45
3.1	Effet du couplage sur les niveaux vibratoires de plaque	45
3.1.1	Mise en évidence d'un couplage fort	45
3.1.2	Influence de la célérité de cisaillement et de dilatation sur la vibration de la plaque	46
3.2	Mise en évidence des phénomènes de raideur et de masse ajoutée sur la vibration totale de la structure	47
3.3	Décroissance vibratoire à la surface du sol	50
3.4	Cartographie de niveaux vibratoires dans le sol et sur la structure	54
4	Comparaison avec l'acoustique	56
4.1	Modèle acoustique correspondant	56
4.2	Comparaison des impédances intermodales de rayonnement acoustique de plaque non bafflée et vibratoires	57
5	Influence de la stratification	62
5.1	Formulation du problème d'un sol stratifié	62
5.2	Mise en évidence de la résonance de la couche	63
5.3	Effet de la stratification sur l'impédance intermodale de rayonnement	67
6	Comparaison théorie-expérience	70
6.1	Expérience du site de "Décines Grand Stade"	70
6.1.1	Modélisation d'une plaque en condition aux limites "guidée"	70
6.1.2	Résultats expérimentaux et comparaison	71

6.2	Comparaison modèle semi-analytique et modèle numérique MEFFISTO	78
7	Conclusion	81
3	Modélisation d'une Barrière Vibratoire Horizontale (BVH)	83
1	Généralisation du couplage d'une plaque avec le sol au cas de deux plaques	84
1.1	Les équations du mouvement de deux plaques couplées au sol	84
1.2	Modélisation du sol	86
1.3	Conditions aux limites de sol dans le domaine de Fourier . . .	87
1.4	Expression des contraintes appliquées par le sol sur les plaques dans le domaine de Fourier	87
1.5	Détermination des amplitudes modales des deux plaques . . .	88
1.6	L'impédance intermodale de couplage vibratoire de deux plaques couplées au sol	90
1.7	Expression du déplacement vibratoire du sol	90
2	Résultats Numériques	91
2.1	Représentation du couplage intermodal des modes de plaques différentes	91
2.2	La Barrière Vibratoire Horizontale comme solution pour atténuer les vibrations	95
2.2.1	Cas d'une dalle de petite taille	95
2.2.1.1	Vitesses quadratiques moyennes des plaques	96
2.2.1.2	Influence de la largeur de la BVH	101
2.2.1.3	Influence de l'épaisseur de la BVH	102
2.2.1.4	Influence de la position de la BVH	103
2.2.2	Cas d'une dalle de tramway	104
2.3	Niveau de contrainte généré sur un bâtiment	109
2.4	Etude d'un type de pose de dalle de tramway	112
3	Conclusion	114
4	Caractérisation d'efforts équivalents appliqués par un tramway sur la dalle couplée au sol	115
1	Généralités sur le problème inverse	116
1.1	Fonction de transfert d'une plaque découplée du sol en vibration de flexion	116
1.2	Fonction de transfert d'une plaque couplée au sol	117
1.3	Analyse des signaux mesurés et construction du problème inverse	119
1.3.1	Transformée de Fourier mesurée	119
1.3.2	Relation entre la fonction de transfert et transformée de Fourier mesurée	120
1.4	Sensibilité du problème inverse aux erreurs de mesure	121
1.5	Bruitage artificiel pour l'étude de la sensibilité	122
1.5.1	Comparaison de la sensibilité d'une plaque couplée et non couplée	123
1.5.2	Comparaison de la sensibilité du problème inverse entre une mesure sur dalle et à la surface du sol . . .	126
2	Cas pratique d'efforts équivalents au passage d'un tramway	129

2.1	Conditions expérimentales	129
2.2	Calcul des efforts équivalents appliqués	132
2.2.1	Efforts appliqués sur la voie 1	132
2.2.2	Efforts appliqués sur la voie 2	136
2.3	Sur la pertinence des efforts équivalents reconstitués : Décroissance au passage d'un tramway avec efforts équivalents	140
3	Conclusion	145
Conclusion		147
1	Annexe A : Calcul des amplitudes des potentiel vecteur et scalaire pour un sol bicouche	149
2	Annexe B : Calcul numérique et convergence des mobilités intermodales	154
2.1	Symetrie	154
2.2	Parité des modes de la fonction γ_{nmpq}	154
2.3	Convergence à l'infini	155
2.4	Convergence autour des points de singularités	155
2.5	Prise en compte des différents cas de parité	156
2.5.1	Mobilité intermodale γ^{11}	156
2.5.2	Mobilité intermodale γ^{12}	157
Bibliographie		161

Table des figures

1	Vue d'ensemble de la problématique vibratoire : de la source vibratoire au rayonnement dans le structure	2
1.1	Exemple d'évolution temporelle de l'accélération vibratoire suite à un impact en deux points distants de 8m l'un de l'autre.	8
1.2	Exemple de différence de phase entre deux points de mesure distants de 8m l'un de l'autre.	9
1.3	Exemple de célérité des ondes de surface suite à une mesure entre deux points de mesure distants de 8m l'un de l'autre.	9
1.4	Exemple de disposition des points de mesure pour une décroissance vibratoire suite à un impact	10
1.5	Vue d'ensemble des étapes pour l'application de la méthode MASW .	11
1.6	Evolution du coût d'une voie sur dalle béton (slab track) et d'une voie ballastée (ballast track) en fonction du temps. [Schilder and Dierich(2006)]	12
1.7	Comparaison théorie expérience d'une structure rigide excitant le sol - Modèle équivalent à celui développé par Jones	19
1.8	Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol et couplée à un fluide avec la célérité de cisaillement du sol ($c = c_s = 100m.s^{-1}$)	20
1.9	Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol et couplée à un fluide avec la célérité de cisaillement du sol ($c = c_s = 400m.s^{-1}$)	20
2.1	Champ de déplacement d'une section de plaque mince sous l'hypothèse de Kirchhoff	25
2.2	Couplage d'une plaque mince en vibration de flexion excitée ponctuellement avec un sol monocouche	25
2.3	Schéma synoptique des contraintes à la surface du sol dans le cas d'un couplage plaque-sol	30
2.4	Représentation schématique de l'onde de cisaillement se propageant suivant l'axe z	31
2.5	Influence des termes extra-diagonaux sur la vitesse quadratique moyenne dans le cas d'un couplage plaque/sol mou monocouche ($c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02, c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$)	36
2.6	Représentation des phénomènes de couplage d'un mode plaque (n,m) avec le sol : cas de la raideur ajoutée	38

2.7	Comparaison de la raideur ajoutée par le sol et de la raideur modale généralisée de la structure du mode (1,1) dans le cas d'un sol mou ($c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$	38
2.8	Représentation des phénomènes de couplage d'un mode plaque (n,m) avec le sol : cas de la masse ajoutée	39
2.9	Comparaison de la masse ajoutée par le sol et de la masse modale généralisée de la structure du mode (1,1) dans le cas d'un sol mou ($c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$	40
2.10	ω * Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée dans la cas d'une structure de 6m de large et 6m de long.	42
2.11	Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée dans la cas d'une structure de 6m de large et 6m de long.	43
2.12	Comparaison de la vitesse quadratique moyenne entre une plaque couplée au sol et une plaque non couplée	46
2.13	Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée pour différent amortissement interne de sol	47
2.14	Vitesse quadratique moyenne de la plaque couplée au sol pour différentes valeurs de c_p avec $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$	48
2.15	Vitesse quadratique moyenne de la plaque couplée au sol pour différentes valeurs de c_s avec $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$	49
2.16	Comparaison de la vitesse quadratique moyenne entre une plaque couplée au sol sans partie résistive ($Re(Z_{nmpq}) = 0$) et une plaque non couplée	50
2.17	Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à différentes distances de la plaque : 2m, 4m, 8m et 16m pour un amortissement interne de sol de $\eta_s = \eta_p = 0.02$	51
2.18	Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à différentes distances de la plaque : 2m, 4m, 8m et 16m pour un amortissement interne de sol de $\eta_s = \eta_p = 0.1$	52
2.19	Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (2m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%	53
2.20	Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (8m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%	53
2.21	Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (16m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%	54
2.22	Cartographie de la vitesse vibratoire de la plaque couplée au sol et du sol à la surface à la fréquence $f = 80Hz$	55
2.23	Cartographie de la vitesse vibratoire de la plaque couplée au sol et du sol dans la section de la plaque en fonction de la profondeur à la fréquence $f = 80Hz$	55
2.24	Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,1) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé	58

2.25	Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé	59
2.26	Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (3,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé	59
2.27	Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,1) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé	60
2.28	Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé	61
2.29	Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (3,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflée	61
2.30	Vitesse vibratoire verticale de la surface du sol moyennée sur une distance de 5m à 25m suite à un effort ponctuel appliqué à la surface du sol	65
2.31	Vitesse vibratoire verticale de la surface du sol moyennée sur une distance de 5m à 25m suite à un effort ponctuel appliqué à la surface du sol pour différentes hauteur de couche	65
2.32	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol dans le cas d'un sol bicouche	66
2.33	Cartographie du niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à 80Hz pour un sol bicouche	66
2.34	Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (11) dans le cas monocouche et bicouche	67
2.35	Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (13) dans le cas monocouche et bicouche	68
2.36	Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (11) dans le cas monocouche et bicouche	68
2.37	Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (13) dans le cas monocouche et bicouche	69
2.38	Photos de l'expérience de décroissance avec impact sur dalle de "Décines Grand Stade"	72
2.39	Vue d'ensemble de du site de "Décines Grand Stade" (droite) et plan de mesure (gauche)	73
2.40	Profil du sol de "Decines Grand Stade"	73
2.41	Fonction de cohérence entre les mesures accélérométrique et l'effort injecté	74
2.42	Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine sur la dalle de tramway	75
2.43	Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 2m de la dalle de tramway	75
2.44	Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 4m de la dalle de tramway	76

2.45	Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 8m de la dalle de tramway	76
2.46	Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 16m de la dalle de tramway	77
2.47	Vue d'ensemble du problème considéré pour la comparaison du code de calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB	78
2.48	Comparaison de la fonction de transfert au point d'excitation entre le code de calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB	79
2.49	Comparaison de la fonction de transfert à 1m du point d'excitation entre le code de calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB	80
2.50	Comparaison de la fonction de transfert à 2m du point d'excitation entre le calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB	80
3.1	Représentation du couplage de deux plaques avec le sol monocouche semi-infini	84
3.2	Vue de dessus du couplage de deux plaques avec le sol monocouche semi-infini	85
3.3	Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la plaque 1 dans le cas d'un couplage avec deux plaques et avec une plaque	92
3.4	Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la plaque 1 dans le cas d'un couplage avec deux plaques et avec une plaque	92
3.5	Vitesse quadratique moyenne de la plaque excitée par un effort ponctuel et couplée au sol en présence et en absence d'une deuxième dalle couplée au sol	93
3.6	Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire entre les modes de la plaque 1 et les modes de la plaque 2	93
3.7	Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire entre les modes de la plaque 1 et les modes de la plaque 2	94
3.8	Vue de dessus de la dalle excitatrice et de la BVH	96
3.9	Vitesse quadratique moyenne des deux plaques couplées au sol	97
3.10	Cartographie du niveau d'accélération vibratoire à la surface du sol dans le cas d'une plaque couplée au sol à 70Hz	97
3.11	Cartographie du niveau d'accélération vibratoire à la surface du sol dans le cas de deux plaques couplées au sol, la dalle excitatrice et la BVH à 70Hz	98
3.12	Cartographie du niveau d'atténuation vibratoire à la surface du sol causées par la BVH à 70Hz	99
3.13	Cartographie du niveau de déplacement vibratoire dans la profondeur à 50Hz dans la section $y = \frac{L_{y1}}{2}$ dans le cas d'une plaque couplée au sol	99
3.14	Cartographie du niveau de déplacement vibratoire dans la profondeur à 50Hz dans la section $y = \frac{L_{y1}}{2}$ dans le cas de deux plaques couplées au sol	100
3.15	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différentes largeurs de la BVH	101
3.16	Evolution de la célérité de flexion et de cisaillement en fonction de la fréquence	102

3.17	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différente épaisseur de la BVH . . .	103
3.18	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différentes positions de la BVH . . .	104
3.19	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différentes hauteurs de la BVH suite à une excitation sur une dalle de tramway	105
3.20	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différentes types de sol suite à une excitation ponctuelle sur une dalle de tramway	106
3.21	Vue de dessus de la dalle de tramway excitée par 5 efforts ponctuelles en présence de la BVH pour atténuer les vibrations	107
3.22	Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large dans le cas de 5 efforts sur la dalle excitée repartir le long de l'axe de la voie	108
3.23	Représentation d'un cas réel de couplage de deux plaques avec le sol .	109
3.24	Contrainte quadratique moyenne d'une plaque	110
3.25	Contrainte quadratique moyenne d'une plaque ayant différentes largeurs	111
3.26	Comparaison de deux type de pose de dalle de tramway	112
3.27	Vitesse quadratique moyenne des plaques dans le cas d'une pose avec double structure et dans le cas d'une pose simple structure	113
3.28	Vitesse vibratoire sur une surface moyenne à la surface du sol dans le cas d'une pose avec double structure et dans le cas d'une pose simple structure	113
4.1	Vitesse quadratique moyenne d'une dalle de tramway couplée et non couplée au sol	118
4.2	Evolution temporelle de l'accélération vibratoire au passage d'un tramway à Angers	120
4.3	Evolution temporelle RMS de l'accélération vibratoire au passage d'un tramway à Angers	120
4.4	Bruitage de l'accélération vibratoire du point de mesure 1 d'une plaque couplée et découplée du sol	122
4.5	Effort 1 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	123
4.6	Effort 2 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	124
4.7	Effort 3 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	124
4.8	Effort 4 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	125
4.9	Effort 5 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	125
4.10	Effort 1 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	126
4.11	Effort 2 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	127

4.12	Effort 3 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	127
4.13	Effort 4 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	128
4.14	Effort 5 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération	128
4.15	Site de mesure des niveau d'accélération le long du tramway	130
4.16	Vue de dessus de la voie 1 et 2 du tramway d'Angers	131
4.17	Efforts équivalents obtenus au passage d'un tramway sur la voie 1	133
4.18	Comparaison de l'effort équivalent 1 pour deux tramways passant sur la voie 1	133
4.19	Comparaison de l'effort équivalent 2 pour deux tramways passant sur la voie 1	134
4.20	Comparaison de l'effort équivalent 3 pour deux tramways passant sur la voie 1	134
4.21	Comparaison de l'effort équivalent 4 pour deux tramways passant sur la voie 1	135
4.22	Comparaison de l'effort équivalent 5 pour deux tramways passant sur la voie 1	135
4.23	Efforts équivalents obtenus au passage d'un tramway sur la voie 2	136
4.24	Comparaison de l'effort équivalent 1 pour trois tramways passant sur la voie 2	137
4.25	Comparaison de l'effort équivalent 2 pour trois tramways passant sur la voie 2	137
4.26	Comparaison de l'effort équivalent 3 pour trois tramways passant sur la voie 2	138
4.27	Comparaison de l'effort équivalent 4 pour trois tramways passant sur la voie 2	138
4.28	Comparaison de l'effort équivalent 5 pour trois tramways passant sur la voie 2	139
4.29	Vue de dessus de la voie 1 et 2 du tramway d'Angers	141
4.30	Niveau d'accélération vibratoire à 2m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1	142
4.31	Niveau d'accélération vibratoire à 4m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1	142
4.32	Niveau d'accélération vibratoire à 8m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1	143
4.33	Niveau d'accélération vibratoire à 16m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1	143
4.34	Niveau d'accélération vibratoire à 20m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1	144
35	Partie réelle (gauche) et imaginaire (droite) de la fonction $N(k_r, \omega)$ en fonction de la fréquence pour une sol ayant les caractéristiques suivantes : $c_s = 160m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$, et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$	154

Résumé

Ce travail de thèse traite de l'interaction d'une plaque rectangulaire en vibration de flexion avec un sol stratifié. L'approche semi-analytique abordée ici est similaire à celle du couplage d'une plaque non bafflée avec un fluide.

Le chapitre 1 correspond à une introduction de la problématique de couplage d'une structure avec le sol. On rappelle notamment les difficultés de la modélisation du sol mais également les techniques actuelles pour caractériser celui-ci. On présente également quelques modèles utilisés pour traiter la problématique de couplage sol-structure.

Le chapitre 2 présente la formalisation du problème de couplage d'une plaque en vibration de flexion avec le sol. La notion d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire est définie de façon analogue à son équivalent acoustique. À partir de cette définition, la notion de masse, raideur et amortissement modal ajouté sur la structure par le sol est introduite. L'effet sur le niveau vibratoire de la structure est présenté, notamment l'effet très amortissant du sol sur la structure. Une comparaison avec le modèle équivalent acoustique est présentée avec une attention particulière portée sur les différences entre les impédances intermodales. L'influence de la stratification sur le niveau vibratoire de la structure fait apparaître des phénomènes nouveaux sur la partie imaginaire de l'impédance intermodale. Finalement une comparaison théorie-expérience a été effectuée dans le cas d'une dalle de tramway couplée au sol. On présentera également une comparaison avec un code numérique, MEFISSTO développé par P. Jean au sein du CSTB.

Le chapitre 3 présente une extension du modèle d'une plaque couplée au sol au cas de couplage de deux plaques avec le sol. On montre notamment que l'écriture du problème reste très similaire au problème d'une plaque couplée au sol. Les impédances intermodales peuvent encore être définies avec la prise en compte du couplage des modes d'une plaque sur les modes de l'autre plaque. On présentera trois applications de ce modèle. La première concerne l'utilisation d'une Barrière Vibratoire Horizontale à la surface du sol pour atténuer les vibrations issues d'une première plaque modélisant la dalle de tramway. La seconde application concerne la modélisation de la fondation d'un bâtiment lorsque celle-ci se situe à la surface du sol. On montre notamment que le niveau vibratoire reçu par ces fondations peut être une donnée d'entrée pour la modélisation de la vibration d'un bâtiment complet. Enfin le cas d'un certain type de pose de dalle de tramway est abordé dans un souci de réduction du niveau vibratoire transmis à la surface du sol au passage d'un tramway.

Le chapitre 4 constitue une ouverture du problème de couplage d'une plaque avec le sol par l'utilisation de ce modèle dans des problématiques inverses. On montre qu'il est possible par un problème inverse de remonter aux efforts équivalents injectés

sur une dalle de tramway au passage de celui-ci. On introduit notamment le fait que le sol permet une régularisation du problème lors de l'inversion par rapport à son équivalent acoustique.

Abstract

This thesis is concerned with the coupling between a flexural vibrating plate and a stratified ground. A semi-analytical solution is introduced similar to the equivalent acoustical problem.

Chapter 1 is an introduction of the ground-structure modeling. It is mentioned difficulties which can occur when considering ground modeling as well as ground characterization. Several models regarding ground-structure interaction is introduced.

Chapter 2 deals with the semi-analytical problem formulation of a flexural plate coupled to the ground. The ground cross modal impedance is defined in a similar way as the equivalent acoustical impedance. From this definition, the ground added mass, stiffness and damping to the plate are presented. Similarities and discrepancies between the acoustical and the ground cross modal impedance are introduced. Influence of the ground stratification on the plate vibration shows new phenomena especially on the imaginary part of the ground cross modal impedance. A comparison between the model developed in this thesis and an experiment made on a tramway slab has been done as well as a comparison with a numerical model, MEFISSTO developed by P. Jean at CSTB.

Chapter 3 is an extension of the modeling developed in chapter 1 and is concerned with modeling two flexural plates to the ground. It can be pointed out that problem formulation is still close to the problem formulation of one plate coupled to the ground. Three different fields of application of such modeling is presented. The first field of application is concerned with ground mitigation due to the passing tramway on. The first plate is the excited plate by the tramway and the second plate, called Horizontal Wave Barrier, is acting at the top surface as a ground attenuator. The second field of application is concerned with the modeling of building foundation. It is shown that the vibration received by the foundation of a building can be an input data for modeling an entire building vibration. The third field of application is concerned with different cases of tramway slab for reduction of ground vibration.

Chapter 4 is an introduction of the use of this ground structure modeling in the case of inverse problem. It is shown that it is possible to identify injected force to the plate by the tramway. Furthermore the ground allows a regularization of the problem in the inversion which is not the case in the acoustical case.

ACOUPHEN
33 route de Jonage
69681 Pusignan Cedex
France

ACOUPHEN
Ingénierie en acoustique et vibrations

SYSTRA
72, rue Henry Farman
75015 Paris
France

SYSTRA

Publications

Articles de journal dans une revue scientifique à comité de lecture (rang A).

- L. GRAU & B Laulagnet *Ground cross-modal impedance as a tool for analyzing ground/plate interaction and ground wave propagation*, **The Journal of the Acoustical Society of America**, 2015 Vol.135 No.5 p.2901-2914 DOI :10.1121/1.4919332
- L. GRAU & B Laulagnet *Effect of Horizontal Wave Barriers on ground vibration propagation*, **The Journal of the Acoustical Society of America**, 2015 Vol.138 No.3 p. DOI : 10.1121/1.4928309
- L. GRAU & B Laulagnet *On the use of cross modal radiation impedances in plate-ground coupling*, **Acta Acustica**, 2015 Soumis le 24-03-2015, under review

Articles de congrès international.

- L. GRAU & B Laulagnet *Similarités du couplage fluide-structure et sol-structure - cas des plaques*, **Congrès Français d'Acoustique 2014**, Poitiers France 2014 p.1449-1456
- L. GRAU & B Laulagnet *The ground cross-modal impedance as a tool to analyse multiple plates coupled to the ground*, **ISMA 2014**, Leuven Belgique 2014 p.1977-1990
- L. GRAU & B Laulagnet *Mitigation of ground vibration at the top surface by means of a Horizontal Wave Barrier*, **inter.noise 2015**, San Francisco USA 2015 p.

Article dans une revue de vulgarisation scientifique.

- L. GRAU & D.Bozzetto & W. Wasmine & B Laulagnet *Projet SIPROVIB : Développement d'un modèle analytique prédictif du couplage dalle/sol. Application à la prédiction vibratoire d'une plateforme de tramway*, **Acoustique & Techniques 2015**

Événements divers

- JJCAB 2013
- L. GRAU & B Laulagnet *Etude vibratoire du couplage fort entre une plaque finie et un sol stratifié*, **Journée des doctorants Celya 2014**, Lyon France 2014
- JJCAB 2014
- D. Bozzetto & L. Grau *Impact vibratoire au passage de trains/tramways - Demandes des riverains et besoins d'un bureau d'étude pour y répondre*, **7 assises nationales de la qualité de l'environnement sonore**, Lyon France 2014, Atelier 7
- L. Grau & D. Bozzetto *Développement d'un modèle analytique prédictif du couplage dalle/sol - Projet SIPROVIB : Application à la prédiction vibratoire d'une plateforme de tramway*, **Vibrations et Bruits basses fréquences dans les bâtiments**, Paris France 2015,

Introduction

Ces dernières années ont vu la construction d'un nombre croissant d'infrastructures ferroviaires de tous types. Dans ce domaine, la France joue un rôle important à travers des entreprises comme la SNCF, SNCF-reseau, Alstom, Systra, Colas, Thales... autant d'un point de vue de la construction de matériel roulant que de la mise en place des infrastructures. Selon le FIF (Fédération des Industries Ferroviaires), la France est la deuxième puissance ferroviaire européenne derrière l'Allemagne profitant ces dernières années d'un engouement pour le tramway. Dans ce contexte et pour la pérennité de ce domaine, il est important de prendre en compte la problématique vibratoire afin de réduire les nuisances occasionnées.

Le réseau ferré s'étant fortement densifié, les infrastructures ferroviaires se sont rapprochées des habitations à des distances critiques pouvant occasionner des gênes vibratoires. En conséquence, on peut noter ces dernières années une augmentation des plaintes liées à la gêne acoustique. L'aspect acoustique des vibrations a fait et continue de faire l'objet d'intenses études permettant une réduction considérable de la gêne acoustique. Cependant la diminution du bruit de fond dans les habitations, permise entre autre par de meilleurs traitements acoustiques, a entraîné l'émergence de bruit d'origine solidien tout aussi gênant. Ce bruit est dû à l'excitation du sol au passage des trains et transmis aux fondations du bâtiment. Il s'est donc avéré important à la fois de comprendre les phénomènes de propagation vibratoire dans le sol et aussi de développer des outils accessibles à l'ingénieur en vue de préconiser des solutions. La figure 1 donne une vue d'ensemble de la problématique vibratoire où l'on observe le chemin de propagation des ondes depuis la source vibratoire.

Dans ce contexte, l'étude de la plateforme de tramway est un cas particulier de l'ensemble des infrastructures ferroviaires mais représente un nombre croissant de cas d'étude. L'une des difficultés majeures réside dans l'implantation d'une voie de tramway qui se trouve toujours en milieu urbain. Ainsi les habitations sont localisées à partir de quelques mètres des voies c'est à dire dans le champ proche de l'excitation. Les modèles simplifiés de vibration de sol ont montré leurs limites notamment vis-à-vis de l'interaction sol-structure. Ainsi il s'agit de concevoir un outil de prédiction permettant de simuler l'interaction sol-structure dans sa globalité en fonction des caractéristiques de la plateforme et du sol. Au cours de travaux antérieurs [Vouffo(2011)], l'INSA et ACOUPHEN ont montré l'intérêt d'une approche analytique 3D notamment au regard des temps de calcul inhérents aux modèles numériques.

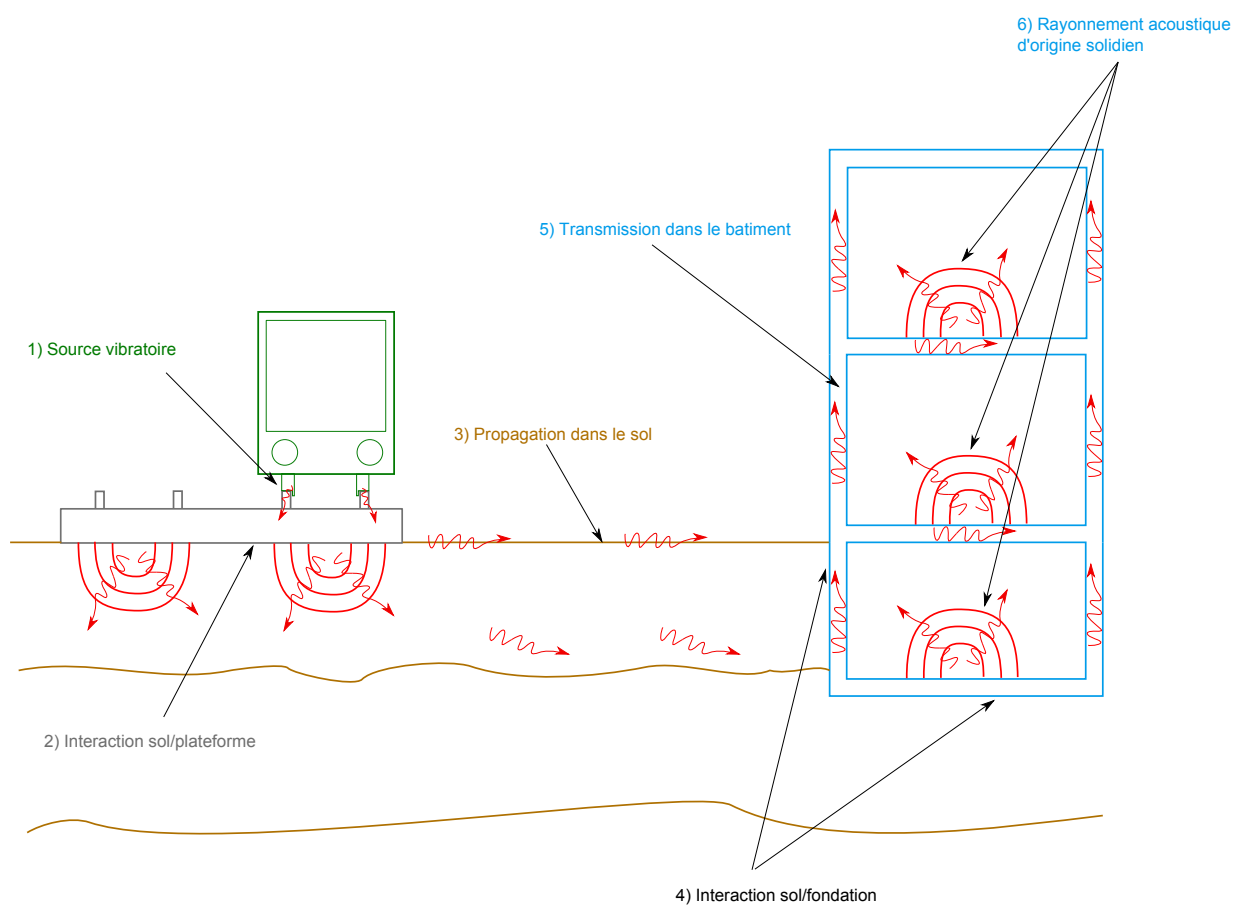


FIGURE 1 – Vue d'ensemble de la problématique vibratoire : de la source vibratoire au rayonnement dans le structure

Chapitre 1

Etat de l'art : l'interaction sol-structure

Dans la mesure où ce travail se concentre principalement sur l'interaction d'un sol avec une plaque en vibration de flexion, nous rappelons dans un premier temps la formulation que l'on peut adopter afin de modéliser les vibrations du sol. Une attention particulière sera portée sur les méthodes de caractérisation des sols qui constitue une donnée d'entrée de la problématique sol-structure. Dans un second temps, un état de l'art de l'interaction sol-structure sera présenté afin de positionner notre étude dans son contexte.

1 Introduction

Ce premier chapitre présente la problématique vibratoire du sol ainsi que l'interaction sol-structure. La modélisation du sol se révèle plus délicate que dans le cas acoustique, des techniques diverses de résolution des équations du mouvement de sol ont été proposées [Hanson et al.(2006)Hanson, Towers, Meister, and Miller,Bongini(2008)].

Dans une première section, nous aborderons les différentes façons de modéliser le sol. Ces dernières années notamment ont vu émerger de nombreuses techniques en ce qui concerne la caractérisation mécanique et géométrique des sols. Chaque sol ayant des caractéristiques propres, il est important d'être capable dans un premier temps de savoir caractériser le sol en dehors de tout couplage mécanique. Dans une seconde section, nous aborderons brièvement un historique des modèles utilisés pour représenter les vibrations de la structure à savoir la dalle de tramway. La dernière section retrace quelques avancées intéressantes en terme de modélisation de l'interaction sol-structure. On distinguera entre autres les modèles numériques des modèles analytiques tous deux complémentaires pour une bonne compréhension des modélisations des différents cas d'interactions.

2 La modélisation et la caractérisation des sols stratifiés

Lorsque l'on s'intéresse à l'interaction sol-structure, la première question que l'on se pose est de savoir comment représenter le sol. Dans une première approche, il s'agit d'un milieu extrêmement discontinu, inhomogène présentant de fortes irrégularités géométriques [Anh(2011),Komatitsch(1997)]. Pour autant l'approximation de ce milieu complexe par un milieu homogène, isotrope élastique constitue une bonne approximation des vibrations du sol [Pei(2007),Pham(2008)]. Lord Rayleigh a apporté une contribution importante avec de tels modèles en prédisant l'existence des ondes de surface dont l'une d'elle porte aujourd'hui son nom et qui joue un rôle central comme nous le verrons tout au long de ce travail.

2.1 Les équations de Navier

Dans la mesure où les contraintes appliquées dans le sol restent faibles, la relation linéaire contrainte-déplacement reste valable et permet l'utilisation des équations de l'élastodynamique. Dans le cas des grandes contraintes ou grands déplacements, la modélisation du sol est nettement plus complexe et demande la prise en compte de modèles additionnels [Gandomzadeh(2011),Destrade(2007)]. Dans les cas d'applications ferroviaires, la propagation des ondes dans les milieux élastiques peut être considérée comme suffisamment proche de la réalité.

Les cas d'études d'infrastructures classiques dans le domaine du ferroviaire consistent à étudier le comportement vibratoire d'une ou plusieurs structures couplées au sol. Ces structures peuvent être diverses à savoir une dalle de béton pour les tramways, un tube cylindrique pour les tunnels ou encore un poteau pour les viaducs. Ainsi il est nécessaire dans un premier temps de savoir dans quelle plage de fréquence

ces ondes sont transmises. Selon la norme ISO 8041 [ISO 8041()], la perception des vibrations issues de la vibration du sol par le corps se situe sur la plage de fréquence [1Hz;80Hz]. En revanche la norme 14837-1 [ISO 14837-1()] stipule que la perception des vibrations issues de la vibration acoustique du sol se situe sur la plage de fréquence [16Hz;250Hz]. Cela nous donne donc une gamme de fréquence où il est nécessaire d'étudier la propagation des ondes dans le milieu ferroviaire. Il est cependant à noter que si l'on étudie un TER, un TGV ou un tramway, la plage de fréquence d'intérêt peut être amenée à varier.

Dans les milieux élastiques, il existe deux types d'ondes de volume qui se propagent, les ondes P pour "primary" et S pour "secondary". Les ondes P se propagent plus rapidement que les ondes S et le déplacement des particules issu de ces ondes se fait parallèlement à la direction de propagation. En revanche le déplacement des particules issu des ondes S est perpendiculaire à la direction de propagation. Le sol est souvent représenté comme une stratification de milieux élastiques possédant chacun des caractéristiques propres en terme de célérité d'onde de volume, de masse volumique et de hauteur de couche. Cette stratification est à l'origine des résonances de couche. A.E.H. Love [Love(1911)] a prédit l'existence d'un autre type d'onde de surface, nommée onde de Love, due à la stratification du sol. Les ondes de Love sont des ondes horizontales polarisées transverses.

A la surface du sol, les ondes de volume se recombinent pour former les ondes de surface. Il a été montré que la propagation des ondes à la surface du sol issue d'une source ponctuelle est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la distance à la source [Ewing et al.(1957)Ewing, Jardetzky, and Press]. A une distance de l'ordre d'une à deux longueurs d'onde, les ondes de volume deviennent négligeables à la surface du sol par rapport aux ondes de Rayleigh. C'est notamment Lamb qui fut l'un des premiers à montrer les propriétés fondamentales des ondes de surface. Achenbach [Achenbach(1973)] a montré que la majorité de l'énergie se propageant dans la profondeur est contenue dans environ une longueur d'onde à partir de la surface libre du sol. Ainsi les ondes de Rayleigh possédant une grande longueur d'onde pénètrent sur une plus grande profondeur le sol. Etant donné que la longueur d'onde est proportionnelle à l'inverse de la fréquence, on peut dire que les basses fréquences traduisent les caractéristiques des ondes en profondeur tandis que les fréquences plus élevées traduisent le comportement des ondes plus en surface. Ce comportement des ondes en surface en fonction des ondes se propageant dans le volume est à l'origine de la caractérisation des sols par mesure des ondes de surface.

2.1.1 Modèles 2D

La modélisation de la propagation des ondes dans les milieux élastiques peut être faite en 2 dimensions dans une première approximation. Cela permet des calculs rapides de déformées modales du sol. Dans les années 50, Thompson [Thompson(1950)] et Haskell [Haskell(1953)] ont développé un modèle de matrice de raideur dynamique modélisant une succession de couches parallèles. Cette méthode analytique est exprimée dans le domaine des nombres d'onde. Il s'agit d'une méthode similaire à celle que nous adopterons dans ce travail de thèse en 3 dimensions. Kausel et Roesset [Kausel and Roesset(1981)] ont apporté une contribution importante en modélisant des matrices de raideur exacte par couche. L'assemblage des matrices de raideur dynamique y est présenté ainsi que les techniques de calcul de la trans-

formée de Fourier inverse pour passer du domaine des nombres d'onde au domaine spatial. [Kausel(2011), Kausel and Peek(1982), Kausel and Roesset(1981)]

2.1.2 Modèles analytiques 3D

Dans de nombreux cas d'étude, les vibrations de sol sont essentiellement des propagations en 2D car l'aspect 3D possède un invariant suivant une direction de la surface du sol. Cependant de par leur géométrie, les zones excitants le sol rendent le problème nécessairement 3D. On peut aussi citer à ce titre le cas des excitations dans le volume afin de simuler un séisme où l'aspect 3D devient important. L'extension du modèle 2D au cas 3D a été présentée à plusieurs reprises. Notamment Jones et al [Jones et al.(1998) Jones, Le Houedec, and Petyt] modélise le cas d'une surface carrée excitant la surface d'un milieu élastique 3D. Généralement les modèles de sol 3D sont utilisés lorsque l'on s'intéresse au couplage sol-structure car la géométrie de ces structures le nécessite.

Les modèles analytiques sont assez limités lorsque l'on s'intéresse à des géométries particulières de sol ou de structure. Il est dès lors indispensable de se tourner vers des méthodes numériques éléments finis (FEM) ou éléments de frontière (BEM).

2.1.3 Modèles numériques

Les méthodes éléments finis présentent cependant une difficulté majeure dans le sens où le sol est souvent modélisé comme un milieu infini dans les directions x et y et semi-infini dans la direction z . Généralement les modèles FEM ne sont pas adaptés pour ce type de géométrie infinie. Cependant pour des milieux élastiques de dimension finie ils seront bien adaptés notamment dans le cas d'une modélisation de ballast. Pour la modélisation du sol, les méthodes éléments de frontière sont bien adaptées. Ainsi on retrouvera toujours le schéma suivant où les structures sont modélisées par FEM et le sol par des modèles BEM.

Une attention particulière est à apporter pour le couplage BEM/FEM. Bien que pouvant prendre en compte un très large cas de géométrie et de structure, ce genre de modèle demande des temps de calculs considérables (de l'ordre de plusieurs jours suivant le modèle) ainsi que des ordinateurs très performants. Dans un contexte d'ingénierie, il n'est pas toujours ni possible ni rentable d'utiliser de tels modèles.

Les éléments de frontière ont été développés en 2D et en 3D dans le contexte ferroviaire. [Dominguez(1993), Jones et al.(2002) Jones, Thompson, and Petyt, Andersen(2002)]. Les modèles 2D sont classiquement utilisés pour quantifier l'effet d'un changement de sol par exemple cependant ils ne permettent pas une étude précise de l'impact vibratoire d'une structure ferroviaire. Le modèle 3D est indispensable pour cela.

Depuis une quinzaine d'année, une modélisation BEM/FEM [Tang and Hung(2001), Jean et al.(2004) Jean, Guigou, and Villot] novatrice a été introduite où l'on considère une des dimensions comme étant infinie. C'est notamment le cas des voies de chemins de fer où le rail, le ballast et le sol sont infinis dans le sens de circulation des trains. Le caractère infini de la structure et du sol dans une direction accroît considérablement les vitesses de calcul. Les temps de calcul deviennent plus acceptable dans le contexte de l'ingénierie.

2.2 La méthode SASW / MASW

Tout modèle d'interaction sol-structure nécessite en donnée d'entrée de connaître les caractéristiques précises du sol. En fonction de la qualité de cette donnée, la caractérisation de l'interaction sol-structure peut être fortement affectée [Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia,Bodet(2005)]. Contrairement à l'acoustique où les caractéristiques du fluide sont relativement constantes en différents lieux, les caractéristiques du sol quant à elles peuvent présenter des disparités importantes à quelques kilomètres d'intervalle. Ainsi chaque lieu possède des caractéristiques de sol spécifiques qu'il convient de déterminer avec précision.

Entre les années 70 et 80, une technique de caractérisation a été proposée par Nazarian et Stokoe [Nazarian and Stokoe(1984),Nazarian(1984)]. Cette technique de caractérisation du sol se base sur la mesure de dispersion des ondes de surface pour connaître les propriétés de chaque strate de sol. Elle présente l'avantage d'être relativement simple à mettre en place tout en donnant des caractéristiques de sol acceptables.

2.2.1 Mesure de dispersion des ondes de surface-SASW

La méthode SASW est une méthode de caractérisation non destructive mécanique et géométrique du sol. Cette méthode consiste à exciter le sol et à mesurer la propagation des ondes en deux points du sol suffisamment éloignés de l'impact pour ne pas être influencés par des effets de champs proches de la source. Il s'agit d'un test actif de caractérisation. La différence de temps d'arrivée des ondes varie en fonction de la fréquence ce qui permet d'obtenir la célérité des ondes de surface en fonction de la fréquence.

D'un point de vue pratique on enregistre le signal temporel $x_1(t)$ et $x_2(t)$ suite à un impact généré à la surface du sol. La figure 1.1 est un exemple d'évolution temporelle de l'accélération en deux points du sol distants de 8m et suite à un impact au marteau de choc.

A partir de ce signal, le déphasage entre les signaux que l'on peut observer sur la figure 1.2 permet d'obtenir le temps d'arrivée du signal en fonction de la fréquence. On voit bien sur la figure 1.2 que cette étape peut être délicate notamment à basse fréquence où le manque de cohérence du signal ne permet pas de dérouler correctement la phase. Une interpolation de la phase permet dans un premier temps de corriger ces effets mais ils ne sont pas toujours suffisants.

Une fois obtenue la phase déroulée, on remonte au temps d'arrivée de l'onde en fonction de la fréquence par la formule suivante :

$$t(f) = \frac{\phi(f)}{2\pi f} \quad (1.1)$$

et à la célérité des ondes de surface :

$$c_R(f) = \frac{D}{t(f)} \quad (1.2)$$

La figure 1.3 est un exemple de la célérité des ondes de surface obtenue grâce à la mesure des ondes entre deux points.

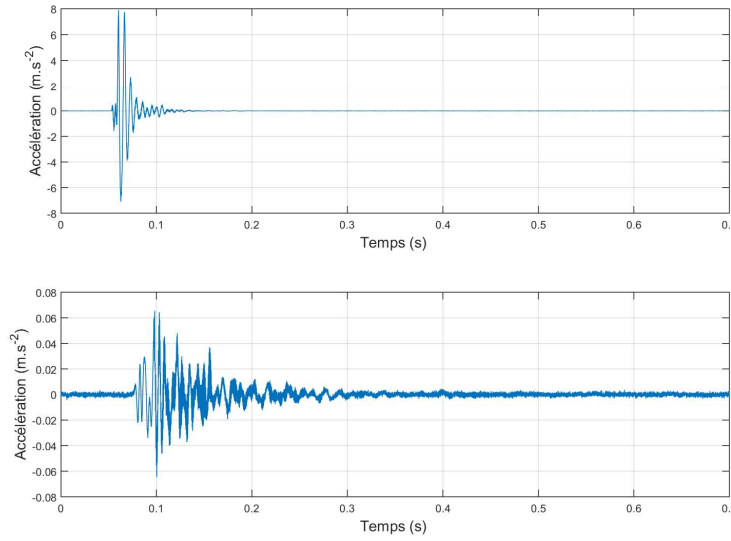


FIGURE 1.1 – Exemple d'évolution temporelle de l'accélération vibratoire suite à un impact en deux points distants de 8m l'un de l'autre.

La qualité de cette célérité étant essentielle pour la suite, des techniques diverses ont été adoptées pour augmenter la précision de la mesure. On cite entre autres la méthode MASW.

2.2.2 La méthode MASW

La méthode MASW (Multiple Analysis of Surface Waves), aussi appelée MOPA (Multi Offset Phase Analysis), est une extension de la méthode SASW et consiste à multiplier le nombre de points de mesure suite à un impact. Cette méthode a été développée au début des années 2000. [Strobbia and Foti(2006), Park et al.(1999) Park, Miller, and Xia, Strobbia()]

La figure 1.4 est une vue d'ensemble de la disposition des points simultanés de mesure lors d'un impact. Elle accroît considérablement la robustesse de la méthode pour l'obtention de la célérité des ondes de surface.

Globalement, on détermine la phase entre chaque point de mesure pour former le vecteur $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$ ainsi que la matrice prenant en compte la distance entre

chaque point de mesure : $G = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}$. En posant $M = [k, \phi_0]^T$ on peut relier M ,

G et Φ par $\Phi = GM$. Ainsi, la phase est obtenue entre chaque point de mesure par :

$$M = G^{-g}\Phi \quad (1.3)$$

où G^{-g} est le pseudo-inverse de la matrice G .

A partir de l'ensemble des phases obtenues pour chaque paire de capteurs, les phases sont moyennées ce qui accroît la qualité de la célérité des ondes de surface mesurées. La célérité des ondes de surface en basse fréquence est obtenue de façon plus précise pour des points de mesure très éloignés tandis que la célérité en haute

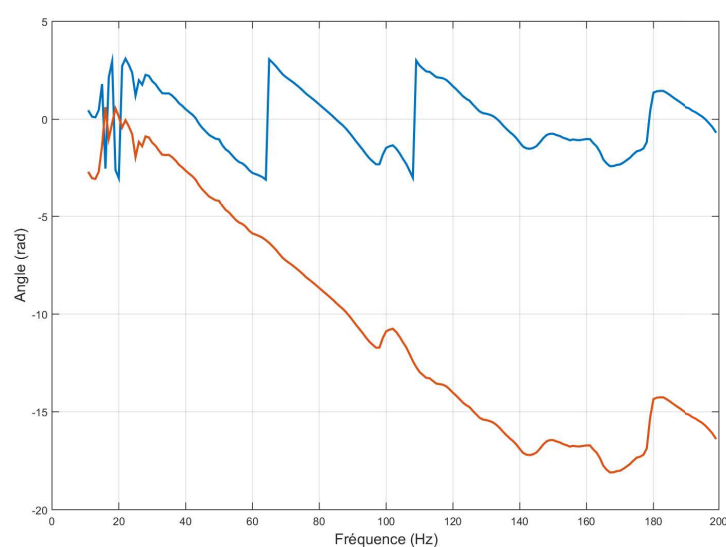


FIGURE 1.2 – Exemple de différence de phase entre deux points de mesure distants de 8m l'un de l'autre.

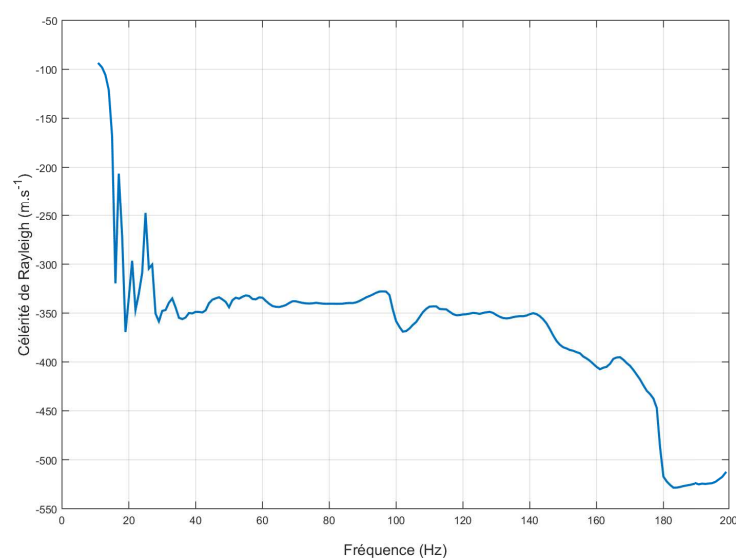


FIGURE 1.3 – Exemple de célérité des ondes de surface suite à une mesure entre deux points de mesure distants de 8m l'un de l'autre.

fréquence est plus précise pour des points de mesure rapprochés. Ainsi la multiplication des points de mesure offre une bonne précision sur une plus large gamme de fréquence.

Une fois la célérité des ondes de surface obtenue, il est possible de déterminer les caractéristiques mécaniques et géométriques du sol par inversion. [Foti(2000)]

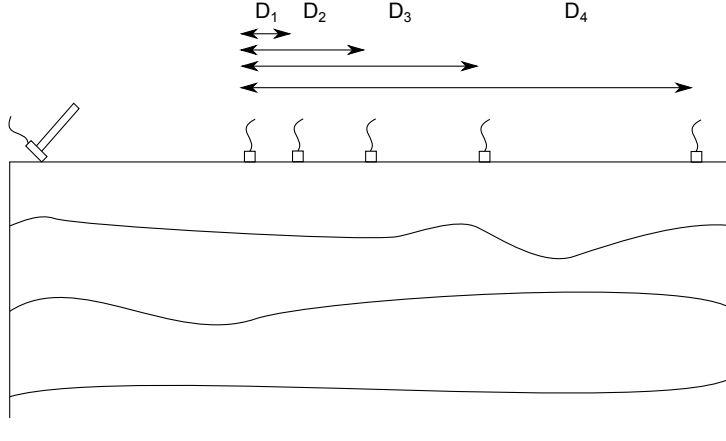


FIGURE 1.4 – Exemple de disposition des points de mesure pour une décroissance vibratoire suite à un impact

2.2.3 Inversion et obtention des caractéristiques mécaniques et géométriques du sol

Dans un problème direct où l'on représente les vibrations d'un sol stratifié, la donnée de la célérité et de l'amortissement des ondes de cisaillement, de dilatation ainsi que la masse volumique et la hauteur de chaque couche permet d'obtenir la célérité de Rayleigh en fonction de la fréquence. On peut représenter le problème d'un sol possédant n couches par :

$$V_R(\omega) = G(\vec{V}_S, \vec{V}_P, \vec{\eta}_S, \vec{\eta}_P, \vec{\rho}) \quad (1.4)$$

où $V_R(\omega)$, $\vec{V}_S = \{V_{S1}, \dots, V_{Sn}\}$, $\vec{V}_P = \{V_{P1}, \dots, V_{Pn}\}$, $\vec{\eta}_S = \{\eta_{S1}, \dots, \eta_{Sn}\}$, $\vec{\eta}_P = \{\eta_{P1}, \dots, \eta_{Pn}\}$ et $\vec{\rho} = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. G est une fonction non-linéaire représentant les équations de Navier pour chaque couche en fonction de leurs conditions aux limites.

La problématique qui nous concerne dans un problème inverse est la détermination de \vec{V}_S , \vec{V}_P , $\vec{\eta}_S$, $\vec{\eta}_P$ et $\vec{\rho}$ connaissant $V_R(\omega)$. On peut traduire cela par la résolution de l'équation suivante :

$$L([O_1, \dots, O_n]^T - f([p_1, \dots, p_n]^T)) = 0 \quad (1.5)$$

où $[O_1, \dots, O_n]$ est la mesure de la célérité de Rayleigh et $[p_1, \dots, p_n]$ est le nombre de paramètres à identifier. L est un opérateur qui peut prendre plusieurs formes suivant la méthode utilisée permettant une recherche optimum des paramètres à identifier. [Constable et al.(1987)Constable, Parker, and Constable]

Finalement, les étapes de la méthode MASW que l'on a brièvement présentées ici peuvent se résumer par le schéma de la figure 1.5. Suite à un impact, on mesure en différents points du sol l'évolution temporelle de l'accélération vibratoire. Cela permet la détermination de la célérité de Rayleigh en fonction de la fréquence due à la stratification du sol. Par une méthode inverse, on obtient finalement les caractéristiques mécaniques et géométriques du sol. [Badsar et al.(2009)Badsar, Schevenels, and Degrande]

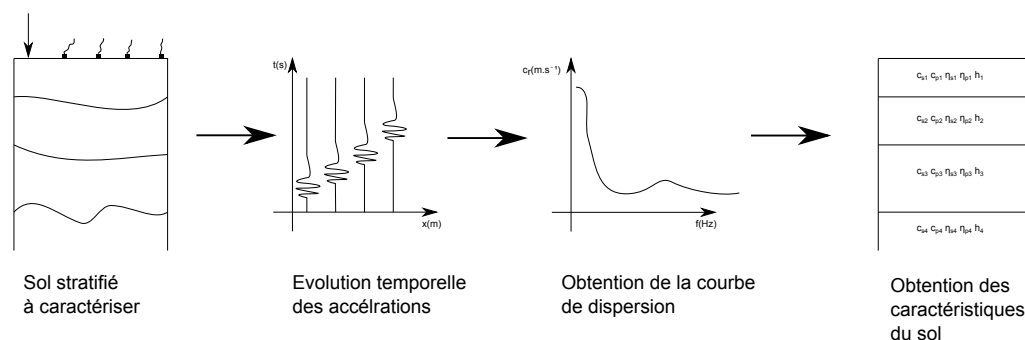


FIGURE 1.5 – Vue d'ensemble des étapes pour l'application de la méthode MASW

3 Les vibrations de plaque en flexion

Dans la problématique de l'interaction sol-structure, il est également nécessaire de porter une attention particulière sur la structure seule. Le cas qui nous intéresse ici est la dalle de béton que l'on retrouve couramment comme support des dalles de tramway. On peut cependant noter un récent développement de ce type de structure dans le cas de voies ferrées grande vitesse.

3.1 Les dalles de tramway

Les dalles de tramway sont des dalles complexes où se mélangent béton, structure métallique, rail, traverses ou encore canalisations. Cependant les plages de fréquence dans le domaine de la vibration de ces structures sont très basses, souvent inférieures à 100Hz. L'effet de toutes ces singularités est donc très limité et l'on utilise généralement des modèles de structures continues. [Real et al.(2011)Real, Martinez, Montalban, and Villanueva]

Une première approche de la dalle de béton consiste à la représenter comme une poutre d'Euler-Bernoulli infinie dans la direction de circulation du tramway [Maldonado(2008)]. M. Maldonado modélise ainsi la dalle de béton en prenant en compte la flexion de la structure dans la longueur ainsi que l'inertie rotationnelle de la structure. Des résultats de comparaison théorie-expérience montrent que ce modèle représente de façon acceptable le niveau vibratoire généré à la surface du sol au passage d'un tramway. En revanche la comparaison théorie-expérience n'étant pas faite sur la structure, il n'est pas possible de discuter de la pertinence du modèle sur la vibration de la structure.

Dans son travail de thèse, M. Maldonado fait une remarque pertinente en conclusion de ces travaux que l'on cite ici : "...Enfin, il serait judicieux de considérer la question des niveaux vibratoires induits dans les bâtiments, en fonction de la configuration voie/sol. En effet, à l'heure actuelle, lors de la conception d'une voie sur un site donné, les critères de choix du type de pose ne prennent tout simplement pas en compte le type de sol. De plus, ces critères sont établis sur des règles de décroissance des vibrations trop simplifiées (pas de prise en compte de l'amortissement interne, puisque le type de sol n'est pas considéré). Pour aller plus loin, il pourrait être intéressant de se préoccuper des critères reconnus au plan européen pour la

gène due aux vibrations des transports. Sur ce point, il existe déjà certaines normes qui constituent sans doute une base de travail [Degen et al.(2006)Degen, Behr, and Grutz]".

Le travail que l'on présente ici permettra de répondre à ce manque notamment en ce qui concerne la prise en compte des fondations d'un bâtiment et de son interaction à travers le sol avec la dalle de tramway. On note que cette prise en compte est possible depuis quelques années avec des modèles BEM-FEM tel que le code de calcul MEFISSTO développé au CSTB. Les temps de calcul étant très importants, une modélisation analytique simplifiée est envisagée ici.

3.2 Les dalles de voies grande vitesse

Les dalles de béton sont de plus en plus utilisées dans le cas de ligne à grande vitesse. Ce type de pose s'est largement développé au Japon tandis que les autres pays du monde ont préféré une pose sur voie ballastée. Cependant depuis une dizaine d'années un nombre croissant de poses sur dalle béton a été utilisé dans de nombreux pays. [Gautier(2015)] L'une des raisons concerne le prix d'entretien de ces structures comme le montre la figure 1.6. [Schilder and Diederich(2006)]. On voit qu'à partir de 20 ans d'existence, l'entretien d'une structure béton est plus rentable que celle d'une voie ballastée.

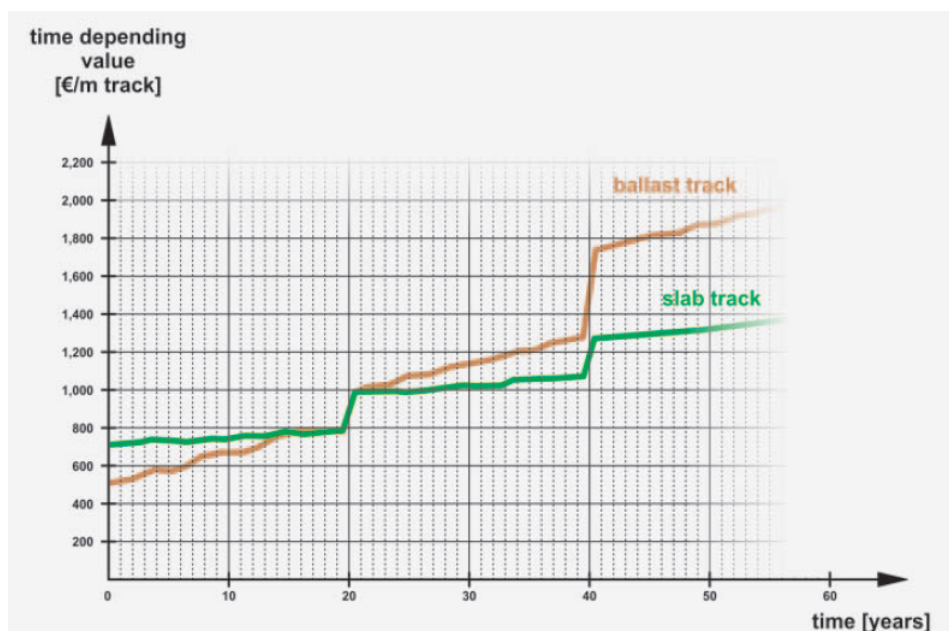


FIGURE 1.6 – Evolution du coût d'une voie sur dalle béton (slab track) et d'une voie ballastée (ballast track) en fonction du temps. [Schilder and Diederich(2006)]

150 ans d'expérience en terme de voie ballastée ont rendu les ingénieurs plus confiants en ce qui concerne la conception de ballastes.

3.3 Les modèles d'excitation des structures pour caractériser l'effort injecté par le tramway sur la structure

Les dalles béton, qui sont à l'origine de la transmission des vibrations dans le sol du au couplage avec le sol, sont excitées par le train lors de son passage. Le modèle d'excitation représente une information importante et sensible qu'il convient de bien modéliser. De nombreux modèles d'excitation ont été développés ces dernières années à savoir le modèle TGV [Sheng et al.(1999)Sheng, Jones, and Petyt], TRAFFIC, DIFF ou encore GENESYS.

Le modèle TGV ne considère que la vibration verticale du véhicule ainsi le modèle du train ne possède que deux degrés de liberté. Dans ce modèle l'ensemble des interactions, à savoir l'interaction roue-rail ou le modèle de suspension, est linéarisé afin de permettre une étude dans le domaine fréquentiel. Le modèle de rail est une poutre d'Euler-Bernoulli infinie dans l'axe de la voie reposant sur un système masse-ressort afin de représenter l'interaction avec le ballast.

Le modèle du véhicule dans TRAFFIC est un peu plus complet dans le sens où celui-ci est représenté comme un système à plusieurs degrés de liberté. En revanche le couplage avec la rail est identique à celui de TGV.

Le modèle DIFF est très similaire au modèle TGV et TRAFFIC. La différence principale vient de l'interaction roue rail qui est considérée dans le domaine temporel. De plus l'ensemble rail, semelle sous rail et ballast est modélisé avec des éléments finis. En revanche le sol n'est pas pris en compte dans ce modèle.

Enfin le modèle GENESYS est un modèle qui se focalise essentiellement sur l'interaction roue-rail qui est représentée comme un ensemble de système masse-ressort-amortisseur différent, pour chaque roue. Tout comme le modèle DIFF, ce modèle ne prend cependant pas en compte de sol.

La difficulté majeure dans l'ensemble de ces modèles réside dans l'interaction roue-rail qu'il est non seulement difficile à modéliser mais, une fois modélisée, difficile à renseigner en donnée d'entrée. L'inconnue majeure de ce type de modèle réside dans l'irrégularité du rail et des roues. En effet cette donnée est extrêmement fluctuante d'un train à un autre, d'un rail à un autre mais également d'un passage de train à un autre en terme d'usure.

4 L'interaction sol-structure et fluide-structure

Dans cette section, nous allons discuter de quelques modèles d'interactions sol-structure et fluide-structure. En effet la formulation de l'interaction sol-structure que l'on présente dans ce travail est similaire, dans l'écriture des équations, à l'approche acoustique d'interaction fluide-structure. On présente quelques avancées majeures en ce qui concerne les modèles analytiques d'interaction fluide-structure.

On présente dans un premier temps les modèles numériques d'interaction sol-structure puis les modèles analytiques d'interaction sol-structure restreint à quelques cas spécifiques. Enfin on présentera les modèles analytiques d'interaction fluide-structure.

4.1 Les modèles numériques du couplage sol-structure

Les méthodes numériques se sont fortement développées ces dernières années avec l'augmentation constante des performances des ordinateurs [Groby(2005), Kouroussis(2009)]. Dans le contexte de l'interaction sol-structure, un problème s'est cependant vite posé à savoir étudier un milieu semi-infini tel que le sol couplé avec un milieu fini constitué par la structure. Sur la base de travaux de certains pionniers dans le domaine acoustique [Burton and G.F.(1971)], des méthodes associant FEM et BEM ont été proposées pour l'interaction sol-structure [Kausel and Peek(1982), Tang and Hung(2001)].

Dans le domaine ferroviaire, on est régulièrement amené à considérer des structures de tailles importantes dans une direction au minimum tel que des tunnels ou même certaines dalles de béton. C'est pour cette raison que dans la pratique de nombreux modèles ne considèrent que l'aspect 2D de la vibration. Cependant dans un contexte où l'on considère des charges roulantes, il n'est plus possible de s'affranchir d'une direction. C'est dans ce contexte que les approches 2.5D ont vu le jour dans lequel on considère une géométrie 2D toute en prenant une excitation 3D. P. Jean et al [Jean(2001), Jean et al.(2004) Jean, Guigou, and Villot] ont étudié l'interaction sol structure dans le contexte ferroviaire en développant un modèle BEM 2.5D pour la structure et le sol. Les temps de calcul issus de MEFISSTO se trouvent considérablement diminués; ce modèle permet de considérer des angles d'incidences dus à l'excitation par le train, ce que ne permet pas des modèles 2D classiques.

Dans l'optique d'étudier la transmission des ondes issue d'une source ferroviaire dans le bâtiment, P. Ropars [Ropars(2011)] étudie la réponse d'un bâtiment excité au niveau de ces fondations. Ces études présentent un grand intérêt dans le sens où les études d'impacts vibratoires dues à l'implantation d'une voie ferroviaire s'intéressent essentiellement à la gêne possible occasionnée chez les riverains. Dans son travail, P. Ropars utilise la méthode des mobilités afin de sous-structurer le problème en deux sous-problèmes. Une approche SEA-mixte est utilisée pour évaluer le niveau de puissance transmise entre les étages. Cela offre des temps de calculs extrêmement rapides pour une première approche de la transmission vibratoire parfois largement suffisante.

L. Auersch [Auersch(2013)] a récemment étudié la réponse harmonique d'une plaque de dimension finie ou infinie couplée au sol. Pour cela il utilise un modèle FEM/BEM et met en avant que la fonction de transfert plaque-sol commence à diminuer fortement à la fréquence de coïncidence. Cette étude est intéressante car elle est similaire à celle que nous présentons dans ce travail. On retrouve certains phénomènes présentés ici sous un angle différent en terme de raideur et de stratification de sol. Il aurait été intéressant de connaître les temps de calculs nécessaires pour chaque étude qui doivent être considérables par rapport à ceux obtenus dans cette étude par méthode analytique.

On peut également citer les travaux de G. Lombaert [Lombaert and Degrande(2009)] qui s'intéressent à l'effet d'une charge quasi-statique et d'une charge dynamique excitant une plaque couplée au sol. Il est notamment montré que dans la gamme des vitesses sous-critiques, la charge quasi-statique est responsable de la réponse du rail tandis que la charge dynamique domine la réponse en champ libre. Une méthode statistique pour l'évaluation des réponses non stationnaires permet une identification des efforts avec une comparaison théorie-expérience présentant un écart de moins

de 5dB en tiers d'octave.

Les modèles présentés ici sont toujours fortement dépendants de la qualité des données d'entrée. Il s'agit généralement de données difficiles à connaître entachées d'incertitudes plus ou moins importantes. N. Rhayma [Rhayma(2010)] a étudié la caractérisation de ces différents paramètres de voies ferrées notamment les paramètres mécaniques des voies ballastées. A travers une étude paramétrique, l'auteur a pu quantifier de façon probabiliste l'effet des différentes opérations de maintenance sur les paramètres mécaniques de la voie.

4.2 Les modèles semi-analytiques du couplage sol-structure

Les méthodes analytiques ont été historiquement parmi les premières à être développées dans la mesure où l'absence ou la faible capacité des ordinateurs ne permettaient pas des calculs numériques importants. Cependant devant la complexité du couplage sol-structure, les méthodes analytiques se sont longtemps restreintes à quelques cas bien spécifiques [Cottureau(2007), Thompson(1950)]. Parmi les premiers travaux conséquents sur la problématique sol-structure, on peut citer les travaux de M. Heckl [Heckl and Petersson(2005)]. Ce dernier étudie le rayonnement des ondes de compression et de cisaillement dans les milieux élastiques par un radiateur plan. Son approche est extrêmement proche de celle proposée ici dans le sens où il fait une analogie avec le rayonnement acoustique dans des fluides lourds tels que l'eau. Heckl met en avant la faible influence des conditions aux limites ce qui se révélera d'une grande utilité pour des approches modales des vibrations de structure. Une extension de son étude au cas des structures fléchissantes a été effectuée où l'on retrouve l'effet du type de couplage, fluide ou milieu élastique, sur l'impédance de rayonnement vibratoire. [Grau and Laulagnet(Submitted in 2015 - under review)]

Entre les années 1995 et 2005 environ, un nombre important de modèles semi-analytiques a été proposé prenant en compte l'interaction sol-structure. D.V. Jones [Jones et al.(1998) Jones, Le Houedec, and Petyt] a étudié le couplage d'une plaque rigide à un sol de dimension finie dans la profondeur. Son modèle est très proche de celui que l'on présente ici à l'exception qu'il ne prend pas en compte la flexion de la structure. Une comparaison théorie-expérience est proposée mais on regrettera l'illisibilité des courbes présentant cette comparaison.

A.V. Metrikine [Metrikine et al.(1999) Metrikine, Wolfert, and Vrouwenvelder] propose par la suite un modèle de poutre de dimension infinie soumise à une charge mobile et couplée à un sol. Il montre notamment que les ondes qui peuvent se propager dans la poutre couplée sont celles où l'effort appliqué est supérieur à une force de compression critique. Par la suite M. Steenbergen [Steenbergen and Metrikine(2007)] modélise une poutre couplée au sol avec une contrainte appliquée à l'interaction sol structure non uniformément répartie. Cela permet la prise en compte d'un passage de train où l'effort se concentre sur une certaine surface de la structure.

Plus récemment A. Karlstrom [Karlström and Boström(2006), Karlström(2006)] modélise une succession de structures (rail, plaque, ballast) infinies suivant une direction et couplée au sol. Son approche utilise une décomposition modale des déplacements dans la direction finie de la structure. Une approche intéressante concerne la modélisation du ballast où il considère le milieu élastique fini suivant une direction. Les solutions analytiques pour les milieux élastiques de dimensions finies 3D sont

très délicates voire impossibles à obtenir d'une façon générale. Il propose un type de solution "élégante" où l'on fait l'approximation des déplacements normaux nuls sur les cotés du ballast.

Dans un contexte sismique, P. Roussillon a étudié l'interaction sol-structure [Roussillon(2006)]. Ce type de travaux présente souvent un grand intérêt dans la mesure où les "modèles sismiques" ont une plus grande antériorité par rapport aux "modèles ferroviaires". Dans son travail, P. Roussillon modélise notamment la transmission des vibrations issues du sol dans les différents étages d'un bâtiment. L'un des objectifs est de fournir une première approximation de la vulnérabilité d'un bâtiment.

En ce qui concerne le ferroviaire, l'un des phénomènes les plus difficiles à modéliser est la voie ballastée. Il existe un nombre très important de modèles de ballast différents mais, à la connaissance de l'auteur, ils représentent toujours un grand challenge en terme de modélisation. L. Ricci [Ricci(2006)] a modélisé le ballast par un ensemble de systèmes discrets et a comparé ce modèle avec le modèle continu représenté par les équations de Navier. On peut notamment voir les écarts entre le modèle discret et le modèle continu qui se trouvent amplifiés lorsque l'on passe du 2D au 3D.

A la connaissance de l'auteur, il n'existe pas de solution analytique permettant de modéliser une structure de dimension finie en vibration de flexion couplée au sol. Tous ces modèles analytiques sont plutôt orientés pour une structure voie ballastée et pour lesquels on regrettera parfois un processus de validation expérimental. Seul M. Maldonado traite le cas de la plateforme béton sans pour autant prendre en compte finement la réponse de la structure.

4.3 Les modèles semi-analytiques pour le couplage fluide-structure

On présente ici quelques résultats de modèles de couplage fluide-structure utilisant des approches analytiques. Ce travail de thèse, représentant l'interaction sol-structure, utilise des approches issues de l'acoustique. On rappelle donc quelques notions apparues au cours du temps modélisant l'interaction fluide-structure.

4.3.1 Le cas académique des structures bafflées

[Morse and Ingard(1987), Junger and Feit(1986)] Un baffle est une frontière où le déplacement vibratoire sur une interface est nul. Historiquement, l'interaction sol-structure a d'abord été résolue pour des cas de structures bafflées. La connaissance du déplacement vibratoire sur toute la frontière du domaine permet une résolution simple du problème et constitue souvent un cas académique pour introduire le rayonnement acoustique.

Les premières études sur cette problématique remontent aux environs des années 50. Notamment G. Maidanik [Maidanik(1962)] fut l'un des premiers à introduire l'impédance intermodale couplant les modes de plaque entre eux. Il ne calcule que la partie réelle de l'impédance intermodale nécessaire au calcul de la puissance acoustique. Les résultats ne sont cependant valables que dans le cas de fluides légers.

Par la suite Wallace utilise l'intégrale de Rayleigh pour le calcul du rayonnement acoustique [Wallace(1972b), Wallace(1972a)] de structures de type poutre et plaque.

Dans son calcul du rayonnement, le couplage intermodal n'est cependant pas prise en compte.

Le couplage avec un fluide lourd proposé par Davies puis Sandman fournit une bonne estimation de l'impédance intermodale en basse fréquence [Davies(1971), Sandman(1975)]. Des calculs numériques des parties réelles et imaginaires ainsi que des termes croisés de l'impédance intermodale ont ainsi permis de mettre en évidence une meilleure compréhension des phénomènes. Il a entre autre été montré que le couplage intermodal est dominé par les termes directs c'est à dire que le couplage du modes (n, m) est dominé par le couplage avec le même mode (n, m) . De plus l'effet résistif de l'impédance intermodale traduit par sa partie réelle tend vers ρc après la coïncidence des ondes acoustiques et de flexion. L'effet réactif de l'impédance intermodale traduit par sa partie imaginaire est toujours positif. On interprète généralement cela par un phénomène de masse ajoutée qui tend vers un maximum un peu avant la fréquence de coïncidence puis tend vers 0. On retrouvera l'ensemble de ces phénomènes tout au long de notre étude.

4.3.2 Couplage d'une plaque non bafflée

Le cas des structures non bafflées est beaucoup plus délicat à formuler que les cas bafflés dans la mesure où le déplacement vibratoire n'est pas entièrement déterminé à la frontière du milieu. En effet un milieu non bafflé consiste à considérer la pression nulle à la frontière du milieu à l'exception de la surface de contact entre la plaque et le milieu fluide.

Ce problème a été résolu simultanément par N. Atalla [Atalla et al.(1996)Atalla, Nicolas, and Gauthier] et B. Laulagnet [Laulagnet(1998)] mettant en avant une forte diminution du rayonnement vibratoire due à l'absence de baffle. La modélisation du cas non bafflé n'est cependant pas abordée de la même façon par les deux auteurs. N. Atalla utilise une formulation variationnelle en restant dans le domaine spatial. B. Laulagnet effectue une transformée de Fourier 2D spatiale en utilisant une représentation intégrale double couche. Une comparaison entre le cas d'un couplage avec un fluide lourd ou un fluide léger est présentée : on y voit la nécessité de prendre en compte les effets réactifs pour l'étude du rayonnement vibratoire.

Par la suite H. Nelisse [Nelisse et al.(1998)Nelisse, Beslin, and J.] étudie le rayonnement d'une plaque en vibration de flexion dans le cas de conditions aux limites non bafflées pour différents cas de conditions aux limites. Pour traiter le cas de différentes conditions aux limites de plaque, il donne une solution de type Rayleigh-Ritz.

Ces études ont permis de montrer qu'il existait des écarts importants de rayonnement en-dessous de la fréquence critique dans le milieu fluide de l'ordre de 20dB entre le cas bafflé et le cas non-bafflé.

Ce modèle de couplage fluide-structure dans le cas non-bafflée représente une avancée majeure pour le travail de thèse présenté ici car la résolution du problème présente de fortes similarités. On montrera notamment les similarités et les différences qu'il existe entre le rayonnement dans le sol et dans le fluide.

5 Synthèse de l'état de l'art et perspectives

Les sections précédentes nous ont permis de faire un état de l'art des différents modèles existants actuellement à la connaissance de l'auteur. Nous allons désormais décrire les axes de développement de ce travail s'inscrivant dans le contexte présenté ci-dessus.

5.1 La complexité du problème d'interaction sol-structure

Dans ce premier chapitre, nous avons placé la problématique de l'interaction sol-structure dans son contexte académique et industriel. Bien que cette problématique ait été étudiée depuis environ 60 ans, ces 15 dernières années ont été des années de fort développement des modèles notamment grâce à l'augmentation des performances de calcul des ordinateurs. Les modèles éléments finis et éléments de frontière permettent notamment la prise en compte d'un large nombre de cas d'interaction allant de l'effort injecté par la charge roulante, la propagation dans le sol et la transmission dans le bâtiment. Les méthodes analytiques présentent dans ce contexte un intérêt moindre de part les cas particuliers géométriques qu'elles peuvent traiter. Cependant ces méthodes permettent une compréhension plus pragmatique des interactions en jeu notamment pour l'ingénierie. L'objectif de cette thèse est dans un premier temps de proposer un modèle analytique d'interaction d'un sol stratifié avec une plaque mince en vibration de flexion. Dans un second temps, on cherche à apporter un regard à la fois pédagogique et opérationnel sur les phénomènes d'interaction sol-structure et pour autant complémentaire à ceux classiquement vus dans les modèles numériques [Grau and Laulagnet(2015a)]. Il est également important de préciser que les interprétations faites sont identiques à celle adoptées par les acousticiens or les interprétations d'interaction sol-structure sont souvent vues par des scientifiques issus de domaine génie-civil. C'est en ce sens que ce travail de recherche permettra un regard différent et nouveau sur les phénomènes d'interactions.

On note quelques difficultés pour aborder les phénomènes de couplage d'une plaque rectangulaire avec un sol homogène. Le cas de couplage d'une structure rigide avec un sol stratifié avait déjà été abordé dans le passé notamment par Jones [Jones et al.(1998) Jones, Le Houedec, and Petyt]. Celui-ci avait fait une comparaison théorie-expérience où ils s'intéressait au niveau vibratoire à la surface du sol suite à l'excitation d'une petite surface de $0.3m$ de côté. A la surface du sol la comparaison est assez bonne en revanche il ne mesure pas le niveau vibratoire sur la structure. En premier lieu, nous avons reconduit cette expérience avec une structure rigide de côté $0.7m$ pour valider la pertinence du modèle envisagé. On voit sur la figure (1.7) les niveaux vibratoires sur la structure (gauche) et à la surface du sol (droite). Le niveau sur la structure présente un écart important d'environ 20dB tandis que le niveau à la surface du sol est comparable entre la théorie et l'expérience. L'origine de cet écart sur la structure provient du fait que la structure est de faible masse (environ 70Kg) et donc que le couplage avec le sol n'est pas satisfaisant. Typiquement la dalle n'est pas assez lourde, ce qui conduit à un couplage non linéaire entre le sol et la dalle. On peut penser que le couplage à la compression n'est pas le même qu'au soulèvement de la dalle, entraînant des décollements partiels de cette dernière.

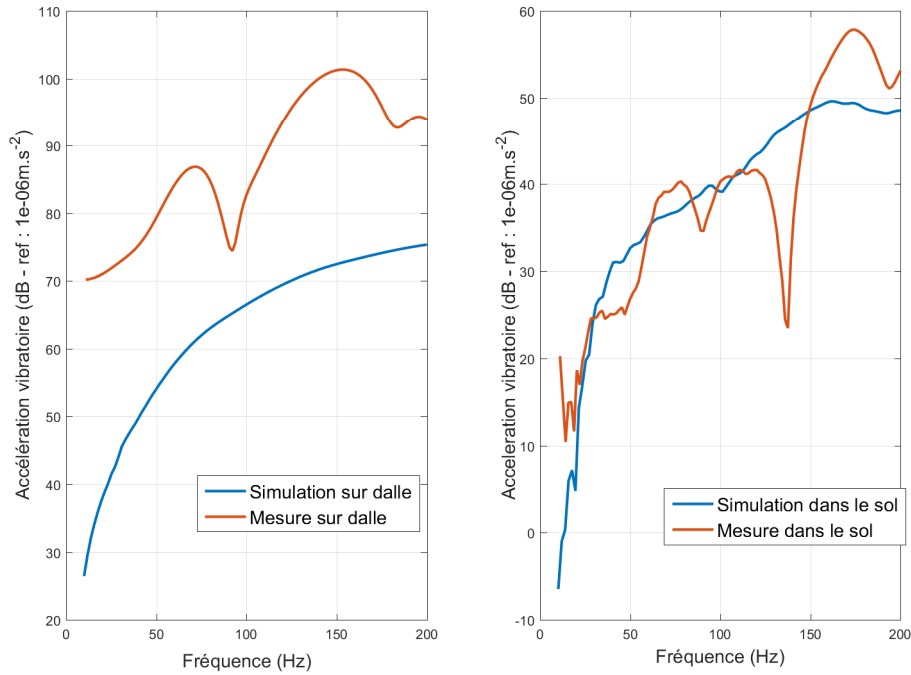


FIGURE 1.7 – Comparaison théorie expérience d’une structure rigide excitant le sol
- Modèle équivalent à celui développé par Jones

En ce qui concerne la modélisation du milieu couplé avec la structure, on peut être tenté dans une première approximation de remplacer les équations de Navier, modélisant le sol, par une équation de Helmholtz. Cette approximation pourrait être envisagée pour un souci évident de simplification de la résolution du problème. On remplacerait donc la célérité des ondes des équations de Helmholtz par la célérité de cisaillement, onde de première importance dans le sol. Les figures (1.8) et (1.9) montrent la vitesse quadratique moyenne de la plaque dans le cas d’une célérité de cisaillement $c_s = 100m.s^{-1}$ et $c_s = 400m.s^{-1}$. On s’aperçoit que cette approximation pourrait être acceptable dans le cas d’un sol souple ($c_s = 100m.s^{-1}$) en revanche pour un sol un peu plus raide ($c_s = 400m.s^{-1}$) cette approximation n’est plus acceptable.

Ces deux exemples montrent succinctement le fait que le sol est un milieu un peu plus complexe à aborder que le milieu fluide. Des approximations très fortes sur le type d’onde se propageant dans un tel milieu peuvent très rapidement conduire à des écarts importants entre la simulation et l’expérience.

5.2 Axes d’études originaux développés dans ce travail de recherche

La présentation de ce travail de thèse se fera suivant 3 axes.

Dans un premier chapitre, la formulation du problème de couplage d’une plaque en vibration de flexion avec un sol sera présentée. Pour des questions de lisibilité, on ne présentera dans un premier temps que le cas d’un sol monocouche. Une nouvelle classe d’impédance intermodale de rayonnement vibratoire sera définie caractérisant

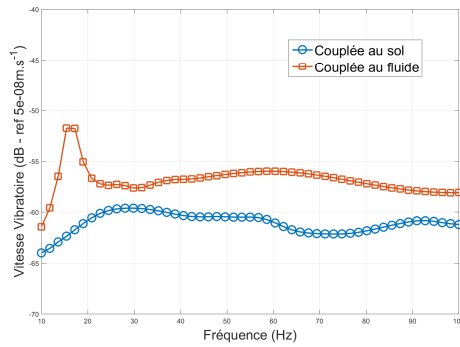


FIGURE 1.8 – Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol et couplée à un fluide avec la célérité de cisaillement du sol ($c = c_s = 100 m.s^{-1}$)

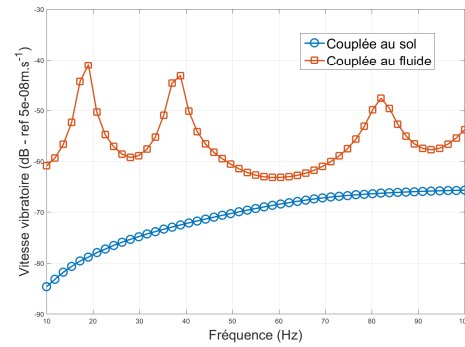


FIGURE 1.9 – Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol et couplée à un fluide avec la célérité de cisaillement du sol ($c = c_s = 400 m.s^{-1}$)

les phénomènes de couplage modal entre le sol et la structure vibrante. Cette impédance intermodale de rayonnement vibratoire joue un rôle central dans ce travail dans le sens où elle permet de expliquer les phénomènes en jeu. On explique donc en quoi le sol apporte de la raideur, de la masse et de l'amortissement ajoutés à la structure changeant considérablement son comportement modal. Cette impédance intermodale donne notamment une explication de l'origine du fort couplage d'une structure avec les milieux élastiques. Un ensemble de résultats numériques est présenté dont entre autre : l'effet du couplage avec le sol sur la réponse de la structure, une comparaison du rayonnement vibratoire entre un couplage fluide et élastique et l'effet de la stratification du sol. Une comparaison théorie expérience sur une dalle de tramway conclura ce premier chapitre.

Dans un second chapitre, on cherche à évaluer l'influence de l'environnement immédiat de la plateforme sur le champ vibratoire du site. La modélisation de deux plaques en vibration de flexion couplées au sol va être présentée. Il s'agit d'une extension du modèle du chapitre 1 qui n'a encore jamais été présentée sous cette forme analytique même en acoustique. Elle présente un intérêt majeur dans les problématiques d'interactions sol-structure dans le sens où elle permet la prise en compte de la structure excitatrice, ici la dalle de tramway, et la structure réceptrice comme les fondations d'un bâtiment. On utilise également ce modèle pour présenter un système permettant l'atténuation des niveaux vibratoires en surface au passage d'un tramway. Ainsi la première structure sera la structure excitée sur laquelle passe le tramway et la deuxième structure consiste en ce que l'on nommera la **Barrière Vibratoire Horizontale** (BVH) à l'origine de l'atténuation des vibrations. On mettra en avant les critères à partir desquels une atténuation suffisante est possible. On finira ce chapitre par deux présentations succinctes, l'une sur le niveau de contraintes maximales injectées dans un bâtiment et l'autre sur l'effet d'un type de pose bien spécifique.

Dans un dernier chapitre, une étude non exhaustive sur la caractérisation des efforts injectés sur la dalle de tramway est menée. Il s'agit d'un chapitre d'ouverture sur l'utilisation du modèle de couplage d'une plaque en vibration de flexion avec

le sol. La connaissance des efforts injectés est une donnée nécessaire pour un étude d'impact vibratoire de l'implantation d'une voie de tramway. On montre des premiers résultats permettant de voir que le problème inverse est un problème bien mieux conditionné, dû au couplage avec le sol, que les problèmes inverses classiques non couplés avec le sol. Il ne s'agit cependant que de résultats préliminaires qui n'ont pas pu faire l'objet d'une étude approfondie dans le temps imparti à la thèse.

Chapitre 2

Modélisation d'une plaque en vibration de flexion couplée au sol

La modélisation semi analytique du couplage d'une plaque en vibration de flexion avec un sol est présentée dans ce chapitre. Dans un premier temps, le cas d'une plaque, dont les conditions aux limites sont appuyées et couplée à un sol monocouche, sera présenté. L'impédance intermodale de rayonnement vibratoire qui constitue une nouvelle classe d'impédance intermodale sera ainsi définie. L'effet du couplage fort entre une dalle et le sol sera mis en avant à travers divers résultats numériques et une comparaison avec le couplage fluide mettra notamment en avant les différences fondamentales entre un couplage fluide et un couplage élastique. L'effet de la stratification du sol, qui correspond à la plupart des sols présents dans notre environnement, sera présenté ce qui nous emmènera finalement à une comparaison théorie-expérience sur une dalle béton de tramway.

1 Modélisation analytique d'une plaque en vibration de flexion couplée à un sol monocouche d'extension semi-infini

Dans cette première section, la formulation du problème de couplage d'une dalle en vibration de flexion avec le sol va être présentée. [Lesueur(1988)] On rappellera dans un premier temps, des notions bien connues de la théorie des plaques ainsi que de la modélisation des milieux élastiques.

1.1 Modèle de vibration d'une plaque isotrope de dimension finie

Dans la plupart des applications ferroviaires traitant des vibrations de tramway, il est nécessaire de considérer la dalle sur laquelle passe le train et qui se trouve couplée au sol. Cette dalle possède un grand nombre de paramètres, autant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue mécanique. En effet la dalle de tramway possède des renforts en acier, des irrégularités géométriques au niveau des canalisations passant dans la structure, un rail le traversant dans sa longueur...etc. En revanche, dans une première approximation, et notamment à basse fréquence, cette dalle peut être assimilée à une plaque mince vérifiant les hypothèses de Kirchhoff.

Les composantes du champ de déplacement d'une plaque mince respectent des critères géométriques à savoir que l'épaisseur est faible devant les autres dimensions (longueur et largeur) et que la normale au feuillet moyen reste normale à la surface moyenne déformée. La figure (2.1) donne une vue d'ensemble de la déformation d'une plaque mince dans la section droite. Sous ces hypothèses, le champ de déplacement des plaques en vibration de flexion vérifie les hypothèses de Kirchhoff [Leissa(1969)] et s'écrit :

$$\begin{cases} w_x(x, y, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} & \forall z \in [-\frac{h_p}{2}; \frac{h_p}{2}] \\ w_y(x, y, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} & \forall z \in [-\frac{h_p}{2}; \frac{h_p}{2}] \\ w_z(x, y, t) = w(x, y, t) & \forall z \in [-\frac{h_p}{2}; \frac{h_p}{2}] \end{cases} \quad (2.1)$$

où x et y correspondent aux positions d'un point de la plaque dans un repère cartésien et w_x , w_y et w_z correspondent aux déplacements de la plaque suivant l'axe x , y et z respectivement.

Dans l'approximation de l'élasticité linéaire, la plaque mince considérée sera homogène et isotrope ce qui permet d'écrire l'équation du mouvement suivante [Guyader(2002), Leissa(1969)] :

$$D_p^* \nabla^4 w(x, y, t) + \rho_p h_p \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (2.2)$$

où $D_p^* = \frac{E_p^* h_p^3}{12(1-\nu_p^2)}$ est la rigidité complexe de flexion et ν_p le coefficient de poisson de la plaque. On considère que la plaque possède un amortissement interne (modèle d'amortissement de Kelvin-Voigt) ce qui consiste à prendre un module de Young complexe tel que $E_p^* = E_p(1+j\eta_p)$. Il s'agit d'une forme équivalente valable en régime stationnaire qui consiste à considérer la vitesse de fluctuation des contraintes dans la

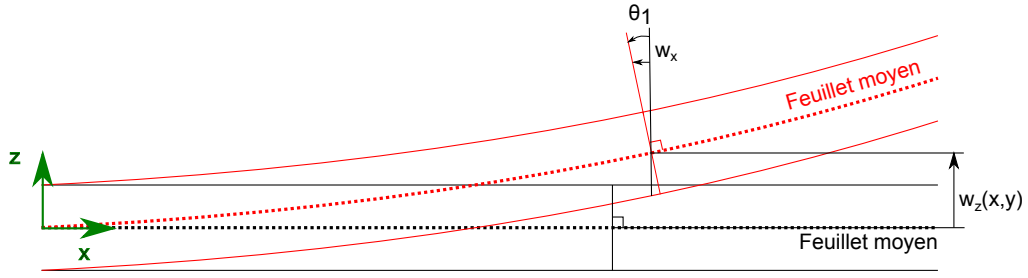


FIGURE 2.1 – Champ de déplacement d'une section de plaque mince sous l'hypothèse de Kirchhoff

structure proportionnelle à un coefficient. $\rho_p h_p$ correspond à la masse surfacique de la structure, l'opérateur *nabla* est défini par $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $w(x, y, t)$ est le déplacement transverse de la structure et $f(x, y, t)$ est l'effort appliqué sur la structure.

La plaque que l'on considère dans cette étude est excitée par une force ponctuelle sur une face de la dalle et couplée au sol sur l'autre face. La figure (2.2) représente le couplage d'une plaque de dimension finie avec le sol. Cette plaque est de longueur L_x et de largeur L_y . Le caractère fini de la structure couplée au sol est l'un des aspects innovants de ce travail pour une résolution semi-analytique.

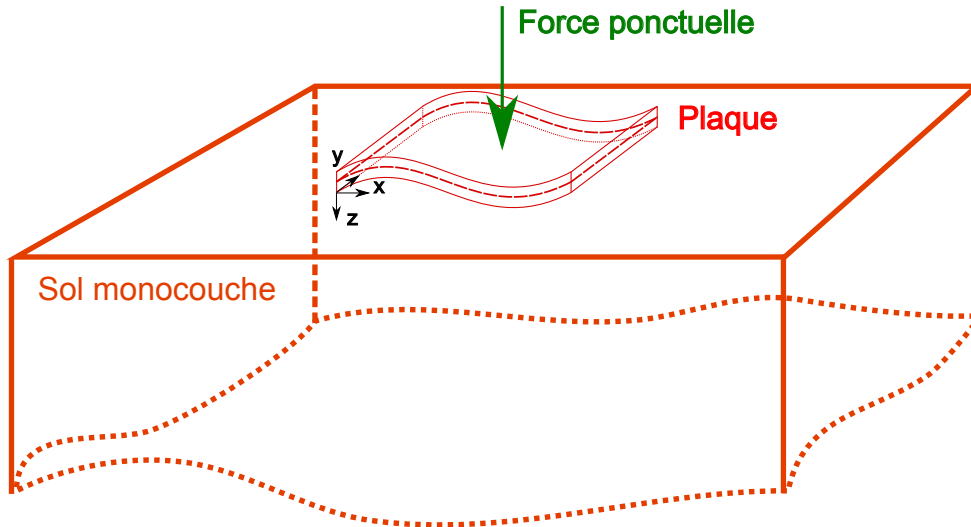


FIGURE 2.2 – Couplage d'une plaque mince en vibration de flexion excitée ponctuellement avec un sol monocouche

L'équation du mouvement de la plaque couplée en régime harmonique (i.e $w(x, y, t) = w(x, y, \omega)e^{j\omega t}$) s'écrit finalement :

$$D_p^* \nabla^4 w(x, y, \omega) - \rho_p h_p \omega^2 w(x, y, \omega) = F(x, y, \omega) + \sigma_p(x, y, \omega) \quad (2.3)$$

où $F(x, y, \omega) = F_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ correspond à l'effort ponctuel généré sur la plaque, d'amplitude F_0 et situé au point de coordonnée (x_0, y_0) . $\sigma_p(x, y, \omega)$ est la

contrainte appliquée par le sol sur la plaque.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas d'une plaque mince avec des conditions aux limites de type "appuyées". Ces conditions portent ainsi sur les déplacements et les moments qui doivent être nuls sur les bords. Ceci se traduit par :

$$\begin{cases} w(x, y) = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \\ M_x(x, y) = -D_p \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \\ M_y(x, y) = -D_p \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \end{cases} \quad (2.4)$$

1.2 Décomposition modale du déplacement de la plaque couplée au sol

Afin d'obtenir une solution de l'équation différentielle (2.3) en respectant les conditions aux limites (2.4), il est possible de développer le déplacement transverse sur la base des modes propres de la plaque c'est à dire donner une solution du déplacement de la forme :

$$w(x, y, \omega) = \sum_{nm} a_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) \quad (2.5)$$

où $a_{nm}(\omega)$ et $\phi_{nm}(x, y)$ correspondent respectivement aux amplitudes modales et déformées modales du mode (n, m) .

Le respect des conditions aux limites "appuyées" (2.4) est vérifiée dans le cas où la déformée modale est développée sur une base de sinus. Ceci nous donne donc :

$$\phi_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \quad \forall (x, y) \in [0; L_x] \times [0; L_y] \quad (2.6)$$

avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$

En injectant la solution (2.5) dans l'équation de mouvement de la plaque (2.3), on obtient :

$$\sum_{nm} (D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) \phi(x, y) = F(x, y, \omega) + \sigma_p(x, y, \omega) \quad (2.7)$$

avec $k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}$ le nombre d'onde mécanique d'un mode de structure.

1.3 Décomposition modale de l'effort

Il est non seulement possible mais également nécessaire dans ce problème de développer l'effort injecté sur la même base modale que le déplacement vibratoire de la plaque [Laulagnet(1998)]. Ceci permet une régularisation du problème qui était déjà nécessaire dans le cas équivalent acoustique d'une plaque non bafflée. Dans le cas où cette régularisation n'est pas effectuée, des résidus numériques d'intégration apparaîtraient rendant le problème très mal conditionné. Ces problèmes seront re-discutés plus tard dans la section 2. Il faut cependant noter que cette décomposition ne constitue pas en soit une approximation étant donné que la théorie de Fourier

nous assure une convergence entre une fonction et son équivalent en décomposition modale.

On pose donc

$$F(x, y, \omega) = \sum_{nm} F_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) \quad (2.8)$$

Dans le cas d'un effort ponctuel de type Dirac, $F(x, y) = F_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, l'amplitude modale de l'effort est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{nm}(\omega) &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} F_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \phi_{nm}(x, y) dy dx \\ &= \frac{4F_0}{L_x L_y} \phi_{nm}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalement en remplaçant l'expression (2.9) dans (2.7), on obtient :

$$\sigma_p(x, y, \omega) = \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \phi(x, y) \quad (2.10)$$

On rappelle que l'inconnue du problème est l'amplitude modale $a_{nm}(\omega)$. Afin de continuer dans la résolution, il est nécessaire d'exprimer la contrainte à la surface du sol en fonction des paramètres du sol pour déterminer l'expression de $\sigma_p(x, y, \omega)$.

1.4 Modèle des vibrations d'un sol monocouche homogène

La modélisation d'un sol semi-infini, homogène et isotrope est rappelée dans cette section. On rappellera entre autres quelques notions bien connues sur la propagation des ondes dans les milieux élastiques.

Considérons la composante du déplacement du sol u_i avec $i = x, y, z$ dans le cas d'une représentation cartésienne. En l'absence de force de volume, l'équation du mouvement de l'élastodynamique, encore appelée équation de Navier, d'un petit élément de volume dv en notation de Gibbs donne [Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia] :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)) = \rho \frac{\partial^2 \underline{\underline{\mathbf{u}}}(x, y, z)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)$ correspond au tenseur d'ordre 2 des contraintes de Cauchy, l'opérateur $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ est l'opérateur divergent en coordonnée cartésienne et ρ est la masse volumique du sol.

Dans le cas des petites déformations, la loi de Hooke de l'élasticité linéaire est appliquée pour un sol isotrope. En utilisant la relation entre la déformation $\varepsilon_{ji}(x, y, z)$ et le déplacement $u_i(x, y, z)$, on aboutit à la relation contrainte déplacement suivante, en notation indicielle :

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}(x, y, z) &= \lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk}(x, y, z) + 2\mu \varepsilon_{ji}(x, y, z) \\ &= \lambda \delta_{ji} u_{k,k}(x, y, z) + 2\mu (u_{i,j}(x, y, z) + u_{j,i}(x, y, z)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où μ et λ correspondent aux coefficients de Lamé.

En injectant la relation (2.12) dans (2.11), on aboutit finalement à l'équation de Navier en déplacement pour un sol homogène, isotrope et en l'absence de force de volume :

$$\mu \Delta \vec{u}(x, y, z) + (\mu + \lambda) \vec{grad}(\vec{div}(\vec{u}(x, y, z))) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}(x, y, z)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Afin de trouver une solution de l'équation de Navier (2.13), la décomposition de Helmholtz est adaptée et consiste à décomposer le déplacement $\vec{u}(x, y, z)$ en un potentiel scalaire $\phi(x, y, z)$ et un potentiel vecteur $\vec{\psi}(x, y, z)$:

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{grad}(\phi(x, y, z)) + \vec{rot}(\vec{\psi}(x, y, z)) \quad (2.14)$$

La question de l'unicité de cette décomposition a été abordée par de nombreux auteurs notamment Achenbach qui fournit une preuve de cette unicité. Ainsi en remplaçant (2.14) dans l'équation de Navier (2.13), on aboutit à deux types d'équations d'onde en régime harmonique :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \Delta \phi(x, y, z) + \omega^2 \rho \phi(x, y, z) = 0 \\ \lambda \Delta \vec{\psi}(x, y, z) + \omega^2 \rho \vec{\psi}(x, y, z) = \vec{0} \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $\vec{div}(\vec{\psi}) = \vec{0}$ la condition de gauge, les potentiels étant définis à une constante près.

A ce stade de la résolution, les équations (2.15) mettent en évidence la présence de deux types d'ondes, bien connues, notamment des géophysiciens, à savoir les ondes de dilatation et les ondes de cisaillement dont les formules sont données par :

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (2.16)$$

La prise en compte de l'amortissement dans le sol est une donnée importante car son influence est grande. Un modèle d'amortissement viscoélastique sera pris en compte dans cette modélisation. Au premier ordre, l'amortissement peut se mettre sous la forme $c_p^* = c_p(1 + j\eta_p)$ et $c_s^* = c_s(1 + j\eta_s)$ où η_p et η_s représentent l'amortissement interne du sol. Cet amortissement est une donnée plus délicate à obtenir expérimentalement que les célérités et ne peut pas être appréhendé sans mesure de décroissance vibratoires à la surface du sol d'autant plus que ces modèles d'amortissement peuvent parfois s'avérer inadaptés. En effet il peut arriver que l'amortissement présente une forte dépendance en fréquence. Cependant cela ne fera pas l'objet de cette étude.

Une différence fondamentale est mise en évidence ici entre le milieu acoustique et le milieu élastique. En acoustique seule l'onde de dilatation est considérée donnant lieu à la résolution d'un problème scalaire. Dans un milieu élastique, deux ondes se propagent, l'onde de dilatation équivalente au cas acoustique, la plus rapide et moins énergétique des deux ondes et l'onde de cisaillement la moins rapide et la plus énergétique. L'onde de dilatation est une onde dont le sens de déplacement des particules est parallèle au sens de propagation de l'onde tandis que l'onde de cisaillement, est une onde dont les particules se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. En effet, si l'on regarde le carré du rapport des célérités de dilatation sur les célérités de cisaillement (2.17), on voit bien, non seulement que l'onde de dilatation est plus rapide que l'onde de cisaillement, mais

également, en considérant que dans la plupart des cas on observe que $\nu = 0.25$, on obtient $c_p = \sqrt{3}c_s$.

$$\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} > 1 \quad (2.17)$$

La valeur des célérités peut fortement fluctuer d'un site à un autre et il est très difficile de donner une valeur des célérités sans mesure de décroissance à la surface du sol. A titre indicatif, on trouve dans la littérature, des plages de célérité d'onde dans le sol dont on donne un exemple dans le tableau (2.1).

Sol	$c_p(m.s^{-1})$	$c_s(m.s^{-1})$
Rocher cristallin	4000 - 6500	2500 - 3500
Rocher fracturé, calcaire	1600 - 3000	1000 - 1500
Rocher souple, gravier très dense	800 - 2000	500 - 1000
Gravier moyen ou dense	650 - 1500	400 - 800
Sable moyen ou dense	350 - 750	200 - 400
Clais souple	80 - 200	50 - 100

TABLE 2.1 – Valeurs moyennes de célérité de dilatation c_p et de cisaillement c_s pour des sols proches de la surface (de [Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia] page 47)

Ces valeurs sont à considérer avec prudence car on s'apercevra que d'un point de vue expérimental, il est très difficile d'associer à un sol des célérités notamment lorsque le profil géométrique du sol n'est pas connu avec certitude.

On cherche désormais une solution des équations du mouvement (2.15). Le milieu étant infini dans la direction x et y , une transformée de Fourier 2D spatiale est adaptée. On rappelle que la transformée de Fourier 2D spatiale et sa transformée inversion sont définies par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_z(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_z(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad \forall (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2 \\ u_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Ainsi en effectuant une transformée de Fourier du potentiel scalaire et vecteur, la résolution de l'équation (2.15) se ramène à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{\phi}(k_x, k_y, z)}{dz^2} + k_1^2 \tilde{\phi}(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{d^2 \vec{\psi}(k_x, k_y, z)}{dz^2} + k_2^2 \vec{\psi}(k_x, k_y, z) = \vec{0} \end{cases} \quad (2.19)$$

avec $k_2 = \sqrt{k_s^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $k_1 = \sqrt{k_p^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $k_s = \frac{\omega}{c_s^*}$ et $k_p = \frac{\omega}{c_p^*}$. Les nombres d'onde k_s et k_p correspondent au nombre d'onde de cisaillement et de dilatation respectivement. Les nombres d'onde k_1 et k_2 sont usuellement nommés nombre d'onde réduit de dilatation et cisaillement respectivement.

Une solution de l'équation différentielle (2.19) peut être mise sous la forme d'une onde se propageant dans la profondeur z sans retour d'onde en respect des conditions de Sommerfield :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(k_x, k_y, z) = Ae^{jk_1 z} \\ \tilde{\psi}_x(k_x, k_y, z) = Be^{jk_2 z} \\ \tilde{\psi}_y(k_x, k_y, z) = Ce^{jk_2 z} \\ \tilde{\psi}_z(k_x, k_y, z) = De^{jk_2 z} \end{cases} \quad (2.20)$$

Les inconnues des potentiels vecteur et scalaire sont les amplitudes A , B , C et D . Ces inconnues sont obtenues classiquement grâce aux conditions aux limites à la surface du sol $z = 0$.

On rappelle que le sol est semi-infini dans la profondeur z et infini dans les directions x et y comme illustré sur la figure (2.2). Les contraintes appliquées à la surface $z = 0$ sont donc nulles à l'exception de la contrainte normale σ_{zz} qui est différente de zéro sous la plaque. Sous forme mathématique cela revient à écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x, y, z = 0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \sigma_{yz}(x, y, z = 0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \sigma_{zz}(x, y, z = 0) = \begin{cases} \sigma_p(x, y) & \forall (x, y) \in [0; L_x] \times [0; L_y] \\ 0 & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - [0; L_x] \times [0; L_y] \end{cases} \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\sigma_p(x, y)$ est la contrainte suivant \vec{z} appliquée par la dalle sur le sol.

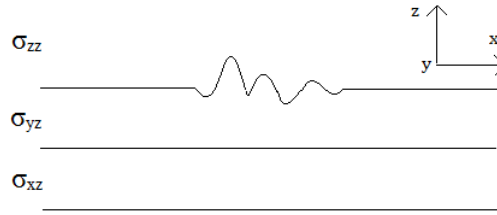


FIGURE 2.3 – Schéma synoptique des contraintes à la surface du sol dans le cas d'un couplage plaque-sol

La plaque vérifie les hypothèses de Kirchhoff-Love donc elle n'excite le sol que suivant la normale au sol c'est-à-dire l'axe \vec{z} . Dans le cas où l'opérateur de Donnell aurait été prise en compte, les vibrations suivant l'axe \vec{x} et \vec{y} auraient nécessités la prise en compte du couplage des contraintes σ_{yz} et σ_{xz} .

Il est nécessaire de donner une expression des contraintes à la surface du sol en fonction des inconnues A , B , C et D . En prenant la transformée de Fourier 2D spatiale des contraintes (2.12) et en remplaçant les déplacements du sol (2.14) par les solutions aux potentiels (2.20), on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz}(k_x, k_y, z) = \mu 2k_x k_1 A e^{jk_1 z} + \mu k_x k_y B e^{jk_2 z} + \mu(k_y^2 + k_x^2) C e^{jk_2 z} + \mu k_2 k_y D e^{jk_2 z} \\ \tilde{\sigma}_{yz}(k_x, k_y, z) = \mu 2k_y k_1 A e^{jk_1 z} + \mu(k_y^2 - k_x^2) B e^{jk_2 z} - \mu k_x k_y C e^{jk_2 z} - \mu k_2 k_x D e^{jk_2 z} \\ \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, z) = (-\lambda k_d^2 - 2\mu k_1^2) A e^{jk_1 z} - 2\mu k_y k_2 B e^{jk_2 z} + 2\mu k_x k_2 C e^{jk_2 z} \end{cases} \quad (2.22)$$

Une équation supplémentaire est nécessaire pour obtenir une solution unique. En effet il est également nécessaire de considérer la condition de jauge dans le domaine

de Fourier à savoir $\text{div}(\vec{\psi}) = 0$. Finalement on obtient le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \mu 2k_x k_1 A + \mu k_x k_y B + \mu(k_2^2 + k_x^2)C + \mu k_2 k_y D = 0 \\ \mu 2k_y k_1 A + \mu(k_y^2 - k_2^2)B - \mu k_x k_y C - \mu k_2 k_x D = 0 \\ (-\lambda k_d^2 - 2\mu k_1^2)A - 2\mu k_y k_2 B + 2\mu k_x k_2 C = \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ jk_x B + jk_y C - jk_2 D = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

La résolution de ce système d'équation peut se faire analytiquement. On obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{k_x^2 + k_y^2 - k_2^2}{g(k_x, k_y)} \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ B = \frac{-2k_1 k_y}{g(k_x, k_y)} \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ C = \frac{2k_1 k_x}{g(k_x, k_y)} \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ D = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

avec $g(k_x, k_y) = 4\mu k_1 k_2 (k_x^2 + k_y^2) - (\lambda k_d^2 + 2\mu k_1^2)(k_x^2 + k_y^2 - k_2^2)$.

On remarque ici que le potentiel vecteur suivant z est nul. Ceci s'explique par le fait que seul la contrainte normale à la surface excite le sol ainsi il n'existe pas de cisaillement suivant z . La figure (2.4) représente la propagation de l'onde de cisaillement suivant z dans le sol où l'on voit qu'une contrainte normale à z ne peut exciter cette onde. En revanche si une equation de membrane, à travers l'opérateur de Donnel par exemple, avait été considérée, la sollicitation à la surface du sol suivant la normale x, y et z aurait généré une onde de cisaillement suivant z et donc $D \neq 0$

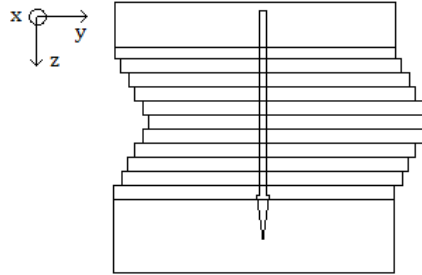


FIGURE 2.4 – Représentation schématique de l'onde de cisaillement se propageant suivant l'axe z

Finalement on obtient une expression analytique entre le déplacement vibratoire du sol et la contrainte appliquée en surface :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(k_x, k_y, z) = (jk_x \frac{k_x^2 + k_y^2 - k_2^2}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_1 z} + jk_2 \frac{2k_1 k_x}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_2 z}) \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ \tilde{u}_y(k_x, k_y, z) = (jk_y \frac{k_x^2 + k_y^2 - k_2^2}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_1 z} - jk_2 \frac{2k_1 k_y}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_2 z}) \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \\ \tilde{u}_z(k_x, k_y, z) = (-jk_1 \frac{k_x^2 + k_y^2 - k_2^2}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_1 z} - jk_y \frac{2k_1 k_y}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_2 z} + jk_x \frac{2k_1 k_x}{g(k_x, k_y)} e^{-jk_2 z}) \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \end{cases} \quad (2.25)$$

Ce qui nous intéresse par la suite est de connaître la déplacement, suivant z , à la surface du sol. L'expression du déplacement vibratoire à la surface du sol suivant cette même direction se simplifie par :

$$\tilde{u}_z(k_x, k_y, 0) = \frac{jk_1 k_s^2}{g(k_x, k_y)} \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) \quad (2.26)$$

Dans un souci de lisibilité des formules, on posera $N(k_x, k_y) = \frac{jk_1 k_s^2}{g(k_x, k_y)}$. Le sol est désormais complètement déterminé à travers l'expression (2.26). Il convient donc de raccorder les équations du mouvement de plaque et de sol.

1.5 Obtention du système linéaire des amplitudes modales

On rappelle que le problème consiste à déterminer le champ vibratoire généré par une plaque de dimension finie couplée à un sol homogène et isotrope. Pour cela, la détermination des amplitudes modales de plaque $a_{nm}(\omega)$ est nécessaire.

On utilise la continuité des déplacements entre la plaque et le sol ce qui s'écrit :

$$u_z(x, y, 0) = w(x, y) \quad \forall (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \quad (2.27)$$

Les conditions aux limites à la surface du sol portent sur les contraintes et sont données par la formule (2.21). En prenant la transformée de Fourier 2D spatiale de la contrainte σ_{zz} , on obtient :

$$\tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{zz}(x, y, 0) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.28)$$

or d'après les conditions aux limites (2.21), la contrainte est nulle à la surface du sol à l'exception de la surface à l'interaction avec la plaque. On obtient donc :

$$\tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \sigma_p(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) = \tilde{\sigma}_p(k_x, k_y) \quad (2.30)$$

Pour obtenir l'expression des déplacements dans le domaine spatial, il convient tout d'abord d'exprimer $\tilde{\sigma}_p(k_x, k_y)$. Pour cela, on effectue une transformée de Fourier 2D spatiale de l'expression (2.10) :

$$\tilde{\sigma}_p(k_x, k_y) = \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \quad (2.31)$$

$$\text{où } \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{nm}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

En remplaçant l'expression (2.31) dans (2.26) et en prenant la transformée de Fourier 2D inverse, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} u_z(x, y, 0) = & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) \\ & - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad \forall (x, y) \in S_p \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalement en utilisant l'égalité des déplacements (2.27), on obtient :

$$\sum_{nm} a_{nm} \phi_{nm}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \sum_{n,m} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.33)$$

A ce stade du développement, on effectue un processus d'orthogonalisation. En effet la base des modes propres choisies à la propriété d'être une base orthogonale en plus de respecter les conditions aux limites. Ainsi on multiplie l'expression (2.33) par $\phi_{pq}(x, y)$ puis on intègre sur la surface S_p de la plaque :

$$\frac{S_p 4\pi^2}{4} a_{pq} = \iint_{S_p} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \phi_{pq}(x, y) dx dy \quad (2.34)$$

Etant donné que la fonction $\phi_{pq}(x, y)$ ne dépend pas de k_x et k_y et qu'elle est continue sur S_p , il est possible d'invertir les intégrales \iint_{S_p} et $\iint_{-\infty}^{+\infty}$. On reconnaît alors la transformée de Fourier 2D spatiale conjuguée de la fonction $\phi_{pq}(x, y)$. Finalement on obtient le système linéaire suivant à résoudre :

$$S_p \pi^2 a_{pq} = \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \gamma_{nmpq} \quad (2.35)$$

avec $\gamma_{nmpq} = \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y$ la mobilité intermodale de rayonnement vibratoire. On donne en annexe B les détails de calcul des termes $\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y)$.

Dans les problèmes acoustiques classiques, on fait intervenir la masse généralisée d'un mode (n, m) définie par $M_{nm} = \rho_p h_p \frac{S_p}{4}$ et la pulsation propre du mode (n, m) définie par $\omega_{nm}^2 = \frac{D_p^*}{M_{nm}} k_{nm}^4$. Le problème peut alors se mettre sous une forme couramment adoptée en acoustique :

$$S_p \pi^2 a_{pq} = \sum_{nm} \left(\frac{4}{S_p} M_{nm} (\omega_{nm}^2 - \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm} \right) \gamma_{nmpq} \quad (2.36)$$

A partir de ce système linéaire, il est désormais possible d'obtenir l'expression des amplitudes modales $a_{nm}(\omega)$. Sous forme matricielle, le problème se résume à l'égalité suivante :

$$\frac{4}{S_p} [\gamma_{nmpq}] [K_{nm}^* - \omega^2 M_{nm}] \{a_{nm}\} - S_p \pi^2 \{a_{nm}\} = [\gamma_{nmpq}] \{F_{nm}\} \quad (2.37)$$

où $K_{nm}^* = D_p^* k_{nm}^4$. Nous avons défini ci-dessus le terme γ_{nmpq} . Il s'agit d'une mobilité intermodale qui traduit le couplage modale des modes de plaque entre eux. Pour comprendre l'importance de ce terme, on peut rappeler que, dans le cas d'une plaque non couplée, (i.e $\sigma_p = 0$) l'amplitude modale d'une plaque s'obtient directement par :

$$a_{nm}(\omega) = \frac{F_0 \phi_{nm}(x_o, y_o)}{M_{nm} (\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \quad (2.38)$$

Les modes de plaques ne sont alors pas couplés entre eux puisque l'amplitude modale du mode (n, m) ne dépend pas des autres amplitudes modales. En revanche il a été démontré que lors d'un couplage mécanique ou fluide, les modes de plaques sont couplés entre eux. Ceci reste vrai dans le cas d'un couplage élastique présenté ici et les termes traduisant ce couplage sont les termes γ_{nmpq} . Dans le chapitre suivant, nous discuterons notamment de sa signification physique. Il convient ici de rappeler que la mobilité intermodale nécessite un traitement numérique particulier dans le sens où l'on doit calculer une intégrale indéfinie présentant des singularités. On rappelle que cette fonction est définie par :

$$\gamma_{nmpq} = \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.39)$$

Les difficultés dans le calcul numérique des termes γ_{nmpq} sont traitées en Annexe B.

1.6 Vitesse quadratique moyenne de plaque et niveau vibratoire à la surface du sol

Lorsque l'on étudie la vibration de structure, la vitesse quadratique moyenne est souvent utilisée pour décrire la vibration de la structure car c'est cette quantité que l'on mesure généralement. Nous allons rappeler la définition de la vitesse quadratique moyenne puis donner l'expression du niveau vibratoire à la surface du sol.

1.6.1 Vitesse quadratique moyenne de plaque

Dans l'ensemble de ce problème, le régime harmonique traduisant la stationnarité du signal est adopté. Dans ces conditions, on donne la vitesse vibratoire de la plaque par :

$$v(x, y, \omega) = j\omega \sum_{nm} a_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) \quad (2.40)$$

Afin de prendre en compte la vibration moyenne sur la surface de la plaque, on intègre l'expression (2.40) sur la surface de la plaque et on obtient :

$$\langle v^2(x, y, \omega) \rangle = \frac{1}{2S_p} \iint_{S_p} |v(x, y, \omega)|^2 dS = \frac{\omega^2}{8} \sum_{nm} |a_{nm}|^2 \quad (2.41)$$

Les vitesses quadratiques moyennes seront exprimées en décibel avec la référence $v_{ref} = 5.10^{-8} m.s^{-1}$:

$$\langle v^2(x, y, \omega) \rangle_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\langle v^2(x, y, \omega) \rangle}{v_{ref}^2} \right) \quad (2.42)$$

1.6.2 Niveau vibratoire à la surface du sol

La résolution du système linéaire (2.37) permet de déterminer les inconnues du système à savoir les amplitudes modales $a_{nm}(\omega)$ de la plaque. En utilisant ces

amplitudes modales ainsi que l'expression (2.32), on obtient le niveau de déplacement vibratoire à la surface du sol ($z = 0$) :

$$u_z(x, y, 0) = \sum_{nm} ((D_p^* k_{nm}^4 - \rho_p h_p \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) T_{nm}(x, y) \quad (2.43)$$

avec $T_{nm}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \phi_{nm}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$.

Afin d'obtenir le niveau de vitesse et d'accélération vibratoire, on écrira :

$$\begin{cases} v_z(x, y, 0) = j\omega u_z(x, y, 0) \\ a_z(x, y, 0) = -\omega^2 u_z(x, y, 0) \end{cases} \quad (2.44)$$

Dans la plupart des cas on exprimera les résultats en décibels. La référence vibratoire dans le cas du déplacement est $u_{ref} = 1.10^{-12}m$, dans le cas de la vitesse est $v_{ref} = 5.10^{-8}m.s^{-1}$ et dans le cas de l'accélération est $a_{ref} = 1.10^{-6}m.s^{-2}$.

Finalement, on tracera les fonction suivantes :

$$\begin{cases} u_{z-dB}(x, y, 0) = 10.log10\left(\frac{|u_z(x, y, 0)|^2}{u_{ref}^2}\right) \\ v_{z-dB}(x, y, 0) = 10.log10\left(\frac{|v_z(x, y, 0)|^2}{v_{ref}^2}\right) \\ a_{z-dB}(x, y, 0) = 10.log10\left(\frac{|a_z(x, y, 0)|^2}{a_{ref}^2}\right) \end{cases} \quad (2.45)$$

Dans cette section, la formulation du couplage d'une plaque mince en vibration de flexion couplée au sol a été établie. L'obtention des amplitudes modales $a(\omega)$, qui constitue les inconnues de notre problème, s'effectue grâce à la résolution du système d'équations linéaires (2.36). Bien que ce soit ce système d'équations linéaires que l'on cherche à résoudre, nous allons présenter ce système sous une autre forme afin d'identifier les phénomènes mis en jeu.

2 L'impédance intermodale de rayonnement vibratoire

Dans cette section, l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire va être formulée. Cette nouvelle classe d'impédance est l'un des aspects novateurs apportés par cette thèse dans la mesure où le couplage avec un milieu élastique n'a pas encore été formulé dans le cas d'une plaque en vibration de flexion et d'un sol. Ainsi nous allons formuler l'expression de cette impédance de la même façon que nous l'aurions fait en acoustique. [Laulagnet(1998), Laulagnet(2012), Grau and Laulagnet(2014b), Maidanik(1962)]

2.1 Formulation du problème à partir des impédances intermodales de rayonnement vibratoire

Dans la section précédente, la formulation du problème de couplage d'une plaque mince avec le sol a abouti à l'écriture d'un système linéaire sous forme matricielle pour chaque mode de plaque :

$$\frac{4}{S_p} [\gamma_{nmpq}] [K_{nm}^* - \omega^2 M_{nm}] \{a_{nm}\} - S_p \pi^2 \{a_{pq}\} = [\gamma_{nmpq}] \{F_{nm}\} \quad (2.46)$$

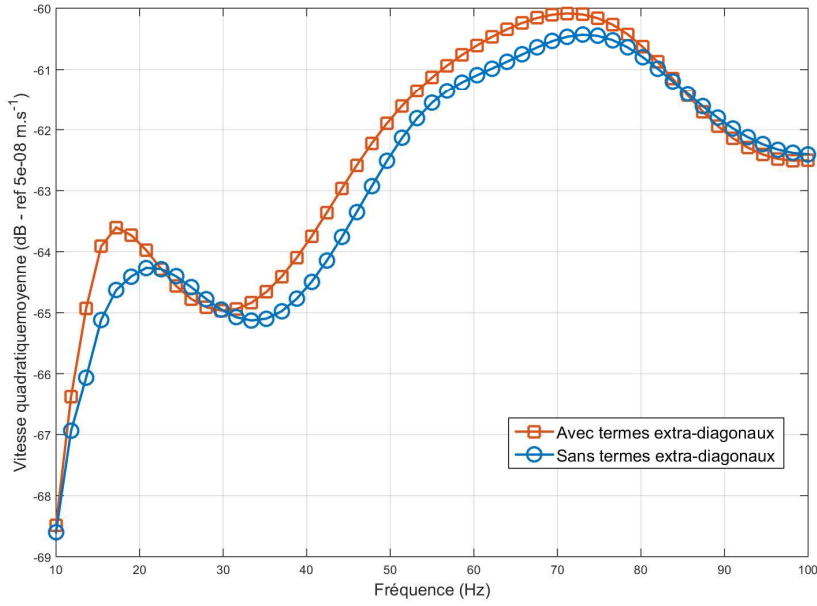


FIGURE 2.5 – Influence des termes extra-diagonaux sur la vitesse quadratique moyenne dans le cas d'un couplage plaque/sol mou monocouche ($c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$)

A partir de ce système, il est possible de définir *l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire* à savoir :

$$Z_{nmpq} = \frac{jS_p^2\pi^2}{4\omega} [\gamma_{nmpq}]^{-1} \quad (2.47)$$

Ainsi le système matriciel (2.46) peut se reformuler de la façon suivante :

$$[K_{nm}^* - \omega^2 M_{nm}] \{a_{nm}\} + j\omega Z_{nmpq} \{a_{pq}\} = \{F_{nm}\} \quad (2.48)$$

Sous cette forme, il est mis en évidence que les modes de plaques sont couplés entre eux à travers le terme d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire Z_{nmpq} . On peut décomposer l'impédance intermodale sous la forme suivante : $Z_{nmpq} = R_{nmpq} + jX_{nmpq}$ où R_{nmpq} correspond à la résistance vibratoire en $Kg.s^{-1}$ et X_{nmpq} correspond à la réactance vibratoire en $Kg.s^{-1}$. Dans le problème équivalent en acoustique, il a été montré que les termes diagonaux de l'impédance intermodale sont prépondérants devant les termes extra diagonaux. Afin de mettre en évidence si c'est toujours le cas dans le cas d'un couplage élastique, nous allons étudier la vitesse quadratique moyenne de la plaque avec et sans les termes extra-diagonaux. [Sandman(1975)] La figure (2.5) présente la vitesse quadratique moyenne de la plaque avec et sans termes extra-diagonaux. On note un écart moyen entre les deux courbes de 0.3dB ce qui est suffisamment faible pour supposer les termes extra-diagonaux comme des termes du second ordre devant les termes diagonaux.

2.2 Mise en évidence des phénomènes de masse modale ajoutée et de raideur modale ajoutée

L'intérêt majeur de montrer la prépondérance des termes diagonaux est de pouvoir simplifier l'expression (2.48) et d'en donner une signification physique. Une fois les termes extra diagonaux supprimés, le système linéaire devient une simple équation scalaire de la forme :

$$(K_{nm}(1 + j\eta_p) - \omega^2 M_{nm})a_{nm}(\omega) + j\omega(R_{nmnm} + jX_{nmnm})a_{nm}(\omega) = F_{nm} \quad (2.49)$$

Cette écriture présente un intérêt majeur dans la compréhension de la physique en jeu car elle permet d'identifier les phénomènes de raideur et masse modale ajoutés mais également d'amortissement modal ajouté ou de transfert d'énergie. A travers l'équation (2.49), on peut identifier l'amortissement ajoutée par le sol sur la structure en posant $\lambda_{nm}^{sol}(\omega) = R_{nmnm}^{sol}$ et l'amortissement propre de la structure étant $\lambda_{nm} = \frac{\eta_p K_{nm}}{\omega}$. En ce qui concerne les phénomènes de raideur et masse ajoutée, il est nécessaire de distinguer deux cas à savoir si $X_{nmnm} > 0$ ou $X_{nmnm} < 0$.

2.2.1 Raideur modale de sol ajoutée

Dans le cas où $X_{nmnm} < 0$, on est dans le cas d'un phénomène de raideur modale ajoutée. On pose donc $K_{nm}^{sol} = -\omega X_{nmnm}$ qui est le terme de raideur ajoutée par le sol. La figure (2.6) donne une représentation des phénomènes de couplage modaux pour le mode (n,m). L'équation (2.49) prend alors la forme suivante :

$$(K_{nm} + K_{nm}^{sol}(\omega))a_{nm}(\omega) - \omega^2 M_{nm}a_{nm}(\omega) + j\omega(\lambda_{nm}^{sol}(\omega) + \lambda_{nm})a_{nm}(\omega) = F_0\phi_{nm}(x_0, y_0) \quad (2.50)$$

Afin d'avoir un ordre de grandeur numérique de la raideur modale ajoutée par le sol, la figure (2.7) montre la raideur ajoutée par le sol ainsi que la raideur propre de la dalle pour le mode (1,1). Par la suite, nous identifierons la fréquence de résonance du mode (1,1) à 20Hz. A cette fréquence la raideur ajoutée par le sol, $3.5.10^7 N/m$, est environ 6 fois plus importante que la raideur propre du premier mode de plaque, $5.5.10^6 N/m$. Cette raideur ajoutée par le sol peut atteindre 34 fois la raideur de la structure à basse fréquence c'est-à-dire à 5Hz.

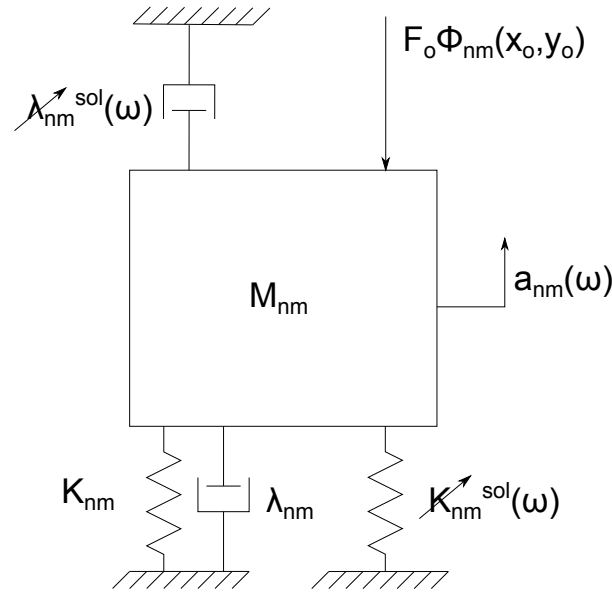


FIGURE 2.6 – Représentation des phénomènes de couplage d'un mode plaque (n,m) avec le sol : cas de la raideur ajoutée

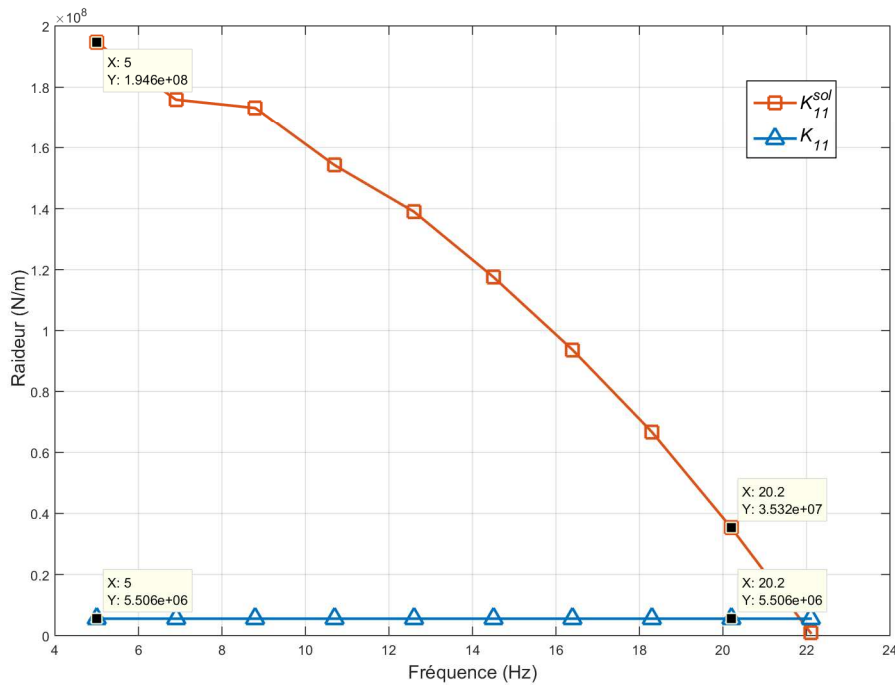


FIGURE 2.7 – Comparaison de la raideur ajoutée par le sol et de la raideur modale généralisée de la structure du mode (1,1) dans le cas d'un sol mou ($c_p = 600 m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160 m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200 Kg.m^{-3}$)

2.2.2 Masse modale de sol ajoutée

Dans le cas où $X_{nmnm} > 0$, on est dans le cas d'un phénomène de masse modale ajoutée. On pose donc $M_{nm}^{sol} = -\frac{X_{nmnm}}{\omega}$ qui est le terme de masse modale ajoutée par le sol. La figure (2.8) donne une représentation des phénomènes de couplage modaux pour le mode (n,m). L'équation (2.48) prend alors la forme suivante :

$$K_{nm}a_{nm}(\omega) - \omega^2(M_{nm} + M_{nm}^{sol}(\omega))a_{nm}(\omega) + j\omega(\lambda_{nm}^{sol}(\omega) + \lambda_{nm})a_{nm}(\omega) = F_0\phi_{nm}(x_0, y_0) \quad (2.51)$$

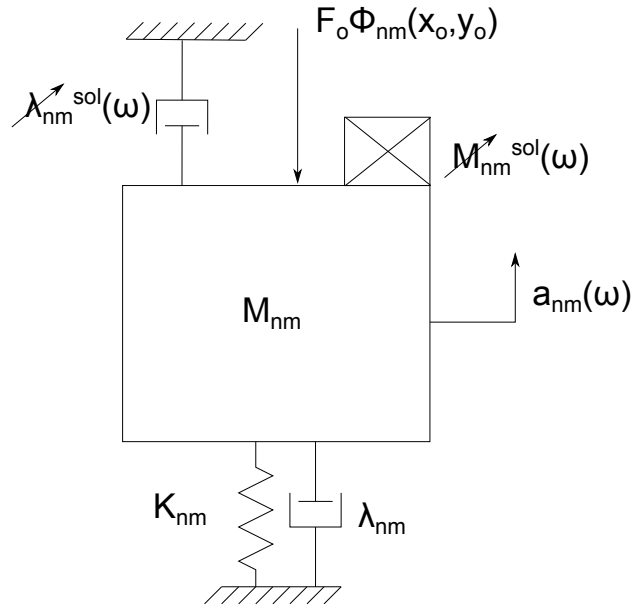


FIGURE 2.8 – Représentation des phénomènes de couplage d'un mode plaque (n,m) avec le sol : cas de la masse ajoutée

La figure (2.9) donne un exemple de valeurs numériques de masse modale ajoutée par le sol dans le cas du mode (1,1). La valeur de la masse ajoutée par le sol pour le mode (1,1) est au maximum 2 fois plus importante que la masse propre de la structure à 60Hz. On verra par la suite pourquoi cet écart est faible comparé à ceux observés en raideur ajoutée.

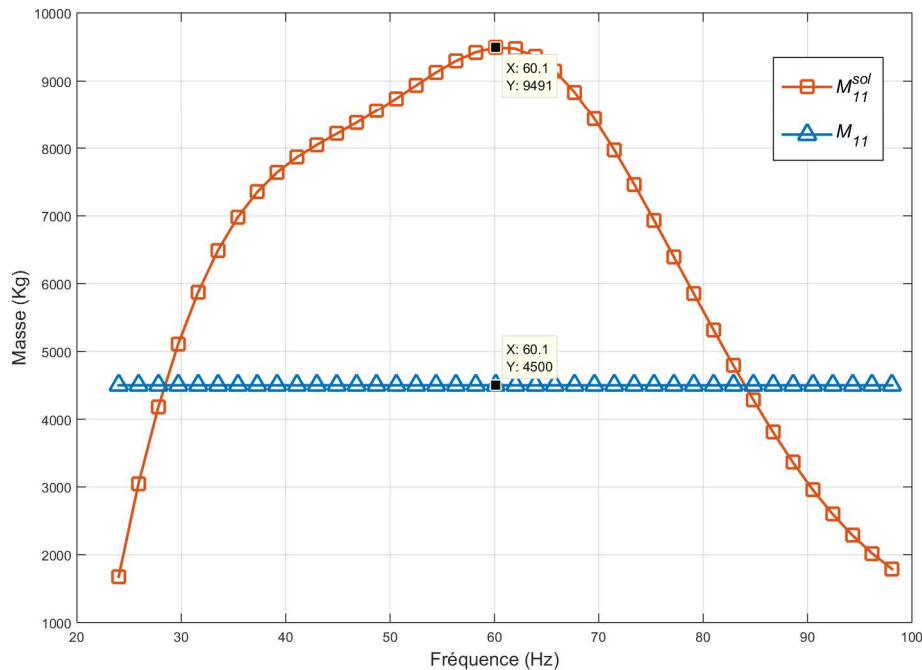


FIGURE 2.9 – Comparaison de la masse ajoutée par le sol et de la masse modale généralisée de la structure du mode (1,1) dans le cas d'un sol mou ($c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$)

2.3 Identification des zones de raideur, de masse et d'amortissement ajoutées sur l'impédance intermodale

Dans les problèmes de rayonnement acoustique, l'impédance intermodale est souvent présentée de façon normalisée. En acoustique, cette normalisation correspond à l'impédance d'une onde plane et traduit ainsi un rayonnement optimum étant donné que pression et vitesse se trouvent en phase. Une normalisation équivalente va ainsi être formulée pour le cas élastique.

2.3.1 Normalisation de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire

On rappelle tout d'abord qu'en acoustique la normalisation des impédances intermodales est $\rho_f c$ où ρ_f est la masse volumique du fluide et c la célérité des ondes dans le fluide. Dans le cas où l'on a une plaque mince fléchissante appuyée sur ces bords, la normalisation sur la surface de la structure est donnée par $\frac{\rho_f c S}{4}$ où S est la surface de la plaque. [Lesueur(1988), Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia]

Dans le cas d'un milieu élastique, deux ondes se propagent dans le sol ce qui nécessite de choisir une célérité pour la normalisation. Par analogie avec l'acoustique, la normalisation des impédances intermodales de rayonnement vibratoire se fera sur l'onde de dilatation ce qui donne :

$$z_{nmpq}(\omega) = \frac{Z_{nmpq}(\omega)}{\frac{\rho c_d S}{4}} \quad (2.52)$$

En effet dans le cas d'une onde plane dans un milieu élastique se propageant uniquement suivant l'axe x , on a :

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x) = \rho c_d u_z(x) \\ \sigma_{zy}(x) = \rho c_s u_y(x) \end{cases} \quad (2.53)$$

2.3.2 Exemples d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée

On donne ici un exemple d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée. La structure considérée est une plaque carrée de $6m$ de coté. On ne présente ici que les modes impairs car l'excitation est située au centre de la plaque donc seul ces modes répondent. L'impédance étant normalisée la considération des caractéristiques du sol n'est pas nécessaire. Cependant comme il vient d'être montré, le choix de la normalisation a été fait par analogie avec l'acoustique sur l'onde de dilatation mais elle aurait pu se faire sur l'onde de cisaillement. Ainsi le sol considéré ici est un sol mou et possède les caractéristiques suivantes : $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$.

La figure (2.10) représente la partie imaginaire de l'impédance intermodale normalisée pour les modes (1,1), (1,3) et (3,3). On remarque ici une forte ressemblance avec le problème équivalent en acoustique à savoir que la partie imaginaire passe par un maximum à 72Hz, 151Hz et 242Hz pour les modes (1,1), (1,3) et (3,3) respectivement. On note également que tout comme en acoustique, la partie imaginaire de l'impédance tend vers 0 pour les fréquences élevées. Cependant il est également à noter une différence majeure à savoir que cette partie imaginaire peut être négative notamment en basse fréquence ici pour des fréquences inférieures à 20Hz, 48Hz et 72Hz pour les modes (1,1), (1,3) et (3,3) respectivement. Vis à vis de ces résultats la formulation présentée ci-dessus dans les sections (2.2.1) et (2.2.2) prend tout son sens. Si l'on considère le mode (1,1) par exemple, le sol apporte de la raideur en basse fréquence jusqu'à 20Hz. Cette raideur diminue lorsque la fréquence augmente. A 20Hz, la partie imaginaire de l'impédance intermodale est nulle ce qui traduit un *pseudo découplage modal* de la plaque avec le sol. Pour les fréquences supérieures à 20Hz, l'impédance intermodale étant positive, le sol apporte de la masse ajoutée à la plaque qui croît avec la fréquence. Cette masse ajoutée atteint un maximum à 72Hz puis diminue pour tendre vers 0. On rappelle que dans le problème équivalent en acoustique, le fluide n'apporte que de la masse ajoutée à la structure. Il est ici mis en évidence une différence fondamentale entre le couplage élastique et le couplage fluide qui aura des conséquences importantes sur la vibration globale de la structure.

La figure (2.11) correspond à la partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire des modes (1,1), (1,3) et (3,3) respectivement. Tout comme la partie imaginaire de l'impédance, on observe de fortes similarités avec son équivalent acoustique. En effet les impédances intermodales tendent asymptotiquement vers 1 lorsque la fréquence tend vers l'infini et vers 0 pour $f \rightarrow 0$. On observe un maximum légèrement supérieur à 1 à 100Hz, 182Hz et 274Hz pour les modes (1,1),

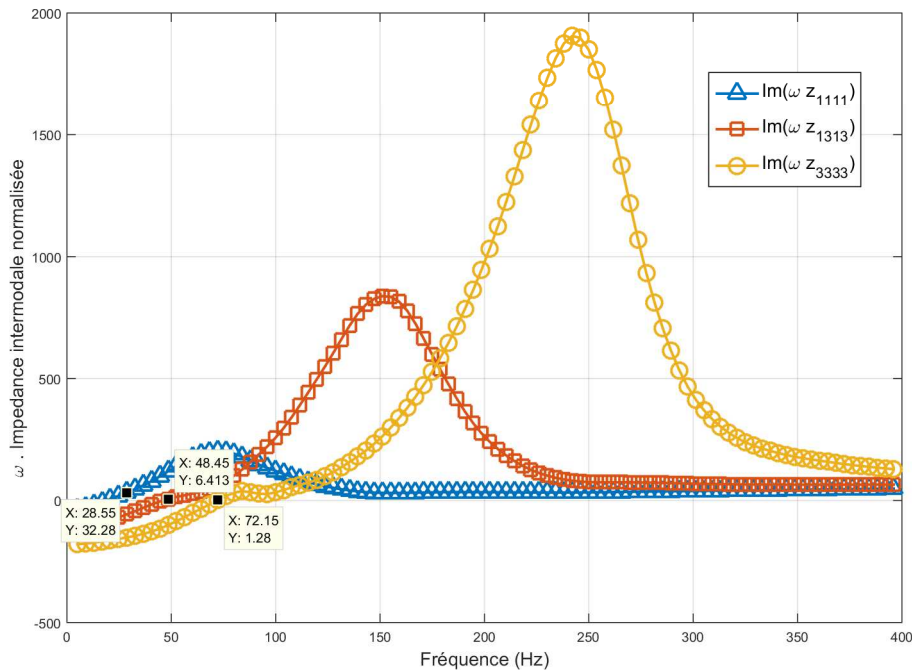


FIGURE 2.10 – ω * Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée dans la cas d'une structure de $6m$ de large et $6m$ de long.

(1,3) et (3,3). On rappelle que la partie réelle de l'impédance intermodale traduit le rayonnement vibratoire de la structure dans le milieu. Ce dépassement est également présent en acoustique. Afin de comprendre la signification de ce dépassement, Earl G. Williams donne l'interprétation suivante. La pression acoustique due à une plaque infinie en vibration est infinie à la fréquence de coïncidence. Une pression infinie induit un rayonnement infini cependant le couplage avec la plaque crée un effet resistif ce qui entraîne une diminution du rayonnement.

2.4 Rôle de la fréquence critique

Sur les courbes précédentes, on note que certaines fréquences jouent un rôle bien particulier dans le sens où elles correspondent soit au passage de la masse modale ajoutée à la raideur modale ajoutée, soit au pic de masse ajoutée pour les parties imaginaires des impédances intermodales.

En ce qui concerne l'annulation de la partie imaginaire de l'impédance intermodale, la fréquence correspondante est 46Hz pour le mode (1,3). Cette fréquence correspond à la coïncidence entre le nombre d'onde de cisaillement et le nombre d'onde mécanique du mode concerné c'est à dire :

$$k_{nm} = k_s \quad (2.54)$$

ce qui se traduit par :

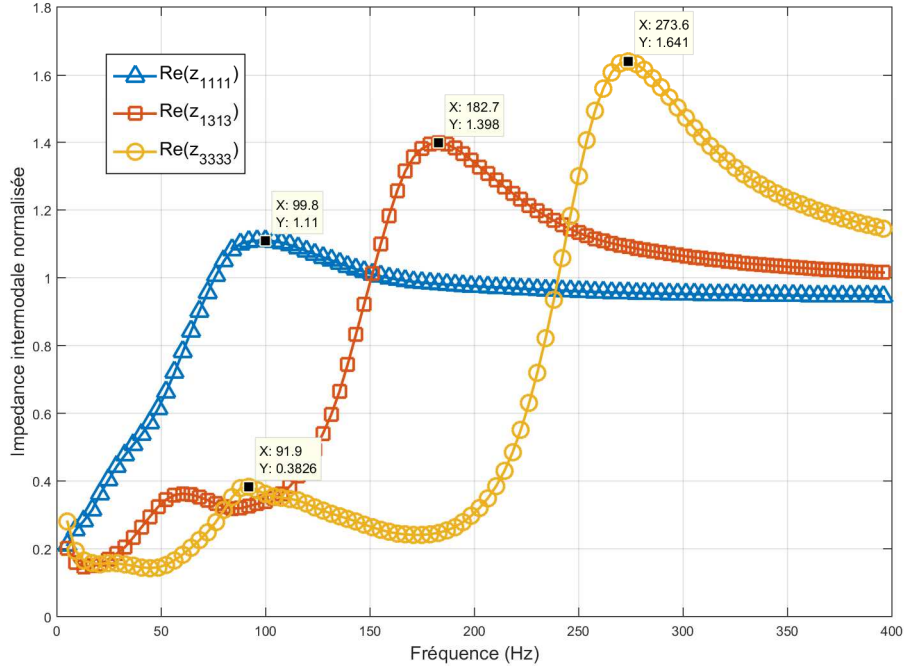


FIGURE 2.11 – Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire normalisée dans la cas d'une structure de 6m de large et 6m de long.

$$f_{c-s} = \frac{c_s}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (2.55)$$

Dans le cas du mode (1,3), on obtient une fréquence de coïncidence $f_{c-s} = 42Hz$ qui correspond à celle obtenue sur la courbe.

De même que précédemment, le pic de l'impédance intermodale qui se situe à 151Hz pour le mode (1,3) est dû à la coïncidence entre le nombre d'onde de dilatation est le nombre d'onde mécanique c'est-à-dire :

$$k_{nm} = k_p \quad (2.56)$$

ce qui se traduit par :

$$f_{c-p} = \frac{c_p}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} \quad (2.57)$$

Par calcul, on obtient une fréquence de 158Hz pour le mode (1,3) ce qui est en accord avec les observations de la figure 2.10.

Ces coïncidences jouent un rôle majeur car elles traduisent la fréquence à partir de laquelle on observe un fort rayonnement. Dans le cas acoustique, une seule onde se propage dans le milieu donc il n'existe qu'une seule fréquence de coïncidence à partir de laquelle on a un fort rayonnement. Dans le cas présent, du à la présence de l'onde de cisaillement, le rayonnement commence à être important même pour des fréquences telles que $f < f_{c-p}$. On mettra en évidence ce phénomène dans les

sections 4. On verra notamment qu'avant la fréquence de coïncidence, le rayonnement vibratoire dans le milieu élastique est très important comparé à son équivalent acoustique.

Dans cette section, l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire a été définie et constitue ainsi une nouvelle classe d'impédance intermodale. Des phénomènes nouveaux par rapport au couplage fluide apparaissent notamment l'effet de raideur modale ajoutée par le sol à la plaque. Ce phénomène est une conséquence de la présence de l'onde cisaillement dans le sol qui est l'onde la plus importante à considérer dans les problèmes de couplage sol-structure.

A travers un ensemble de résultats numériques, les principaux phénomènes du couplage plaque-sol vont être mises en évidence dans la prochaine section en ce qui concerne le comportement vibratoire de la plaque et sa propagation dans le sol.

3 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons présenter des résultats numériques issus de la formulation précédente. On mettra notamment en évidence le couplage fort du sol avec la plaque ainsi que l'influence des principaux paramètres du sol.

3.1 Effet du couplage sur les niveaux vibratoires de plaque

Dans ce paragraphe, le fort couplage d'une structure avec le sol est mis en évidence. Sauf si cela est mentionné différemment le sol considéré est un sol mou et possède les caractéristiques suivantes : $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $c_s = 160m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. Dans cette étude, la plaque considérée sera constituée de béton ($E_p = 2.5 * 10^{10}Pa$, $\rho_p = 2500Kg.m^{-3}$, $\nu_p = 0.3$, $\eta_p = 0.05$) et les dimensions géométriques sont les suivantes : $L_x = 6$, $L_y = 6$ et $h_p = 0.2m$. De telles petites dimensions ont été choisies afin de mettre en évidence les phénomènes majeurs intervenant dans le couplage sol-plaque.

3.1.1 Mise en évidence d'un couplage fort

Le couplage d'une plaque avec le sol est très caractéristique dans le sens où la forte adaptation d'impédance entre le sol et la plaque entraîne un fort couplage. La figure (2.12) illustre ce phénomène où l'on observe la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol et d'une plaque non couplée au milieu extérieur. La plaque est excitée en son centre par un effort d'amplitude $1N$. Seuls les modes impairs répondent à l'excitation c'est-à-dire les modes (1, 1) et (1, 3) (le (3, 1) est identique au mode (1, 3) car la plaque est carrée). Afin d'assurer une bonne convergence sur la plage de fréquence [10Hz;100Hz], les 5 premiers modes sont nécessaires pour la troncature.

La fréquence de résonance du mode (1, 1) et du mode (1, 3) est à 17Hz et 87Hz respectivement dans le cas d'une plaque non couplée. On note une différence de niveau vibratoire sur la vitesse quadratique moyenne dû au couplage allant jusqu'à 36dB aux fréquences de résonance. De plus l'aspect modal de la vibration de la plaque couplée disparaît complètement dû à la forte adaptation d'impédance. En effet l'énergie vibratoire injectée dans la plaque par l'effort est transmis dans sa majorité au sol. La partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement permet de caractériser ce transfert d'énergie. On montrera notamment par la suite que le transfert d'énergie est beaucoup plus important que dans le cas d'un couplage fluide même en dessous de la fréquence de coïncidence.

Il est possible de deviner sur la figure (2.12) un décalage des fréquences de résonance dû au couplage avec le sol. La fréquence de résonance du mode (1, 1) couplé se situe dans la voisinage de la fréquence de résonance du mode (1, 1) non couplé en revanche la fréquence de résonance du mode (1, 3) couplé est décalée vers les basses fréquences, aux alentours de 70Hz par rapport à la fréquence de résonance du mode (1, 3) non couplé. On mettra en évidence dans la section 3.2 la fréquence de résonance des modes couplés ainsi que les effets de masse et de raideur ajoutée par le sol à la structure.

Il vient d'être montré que le couplage avec le sol entraîne un couplage fort faisant disparaître le caractère modal de la vibration de structure. Une autre façon de voir

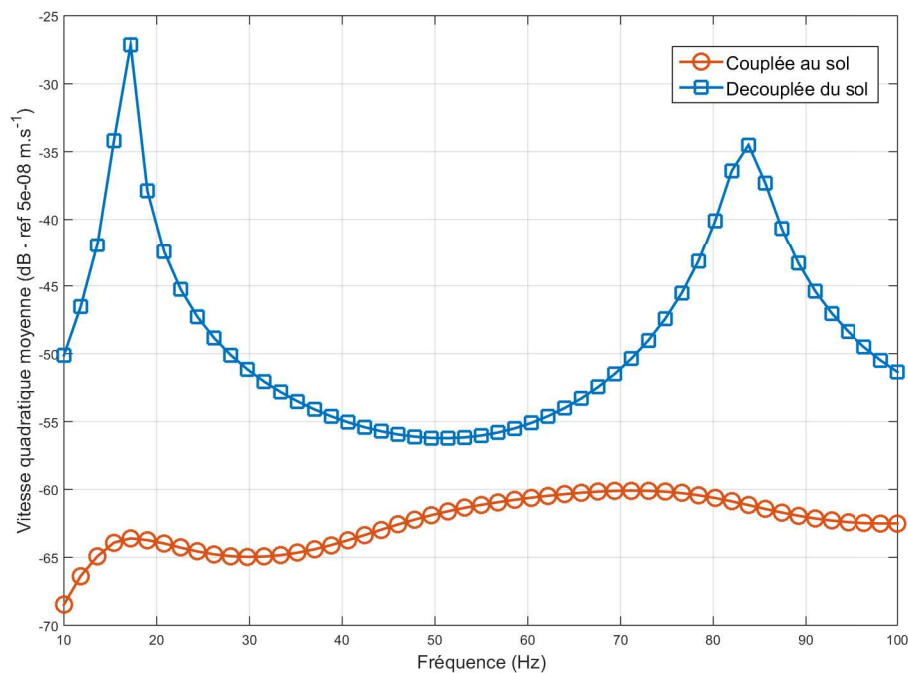


FIGURE 2.12 – Comparaison de la vitesse quadratique moyenne entre une plaque couplée au sol et une plaque non couplée

le problème est que le couplage avec le sol entraîne un fort amortissement ajouté par le sol caractérisé par la partie réelle de l'impédance intermodale. Bien que l'on parle d'amortissement ajouté par le sol sur la structure, le couplage fort n'est pas dû à l'amortissement propre du milieu élastique à savoir les termes η_s et η_p . Afin de mettre évidence ceci, la figure (2.13) correspond à la vitesse quadratique moyenne de la structure pour différents amortissements internes du milieu élastique. On observe bien que l'amortissement interne du sol est du second ordre sur les vibrations de la structure car la variation de 2% à 10% de l'amortissement entraîne une variation de la vitesse quadratique moyenne de maximum 1dB.

3.1.2 Influence de la célérité de cisaillement et de dilatation sur la vibration de la plaque

L'influence des paramètres de célérité des ondes de volume sur la vibration de la structure va être présentée dans ce paragraphe. La figure (2.14) et la figure (2.15) correspondent au niveau de vitesse quadratique moyenne de la plaque pour différentes célérités. La figure (2.14) traduit l'influence de l'onde de dilatation pour une célérité de cisaillement constante. On constate une assez faible variation du niveau vibratoire avec une différence entre le cas $c_p = 400m.s^{-1}$ et $c_p = 800m.s^{-1}$ qui ne dépasse pas 1dB. La figure (2.15) traduit l'influence de l'onde de cisaillement pour une célérité de dilatation constante. Dans ce cas la fluctuation est beaucoup plus importante avec des écarts entre $c_s = 100m.s^{-1}$ et $c_s = 200m.s^{-1}$ allant de 2dB à 6dB. Ceci montre que l'onde de cisaillement a un rôle plus important dans le com-

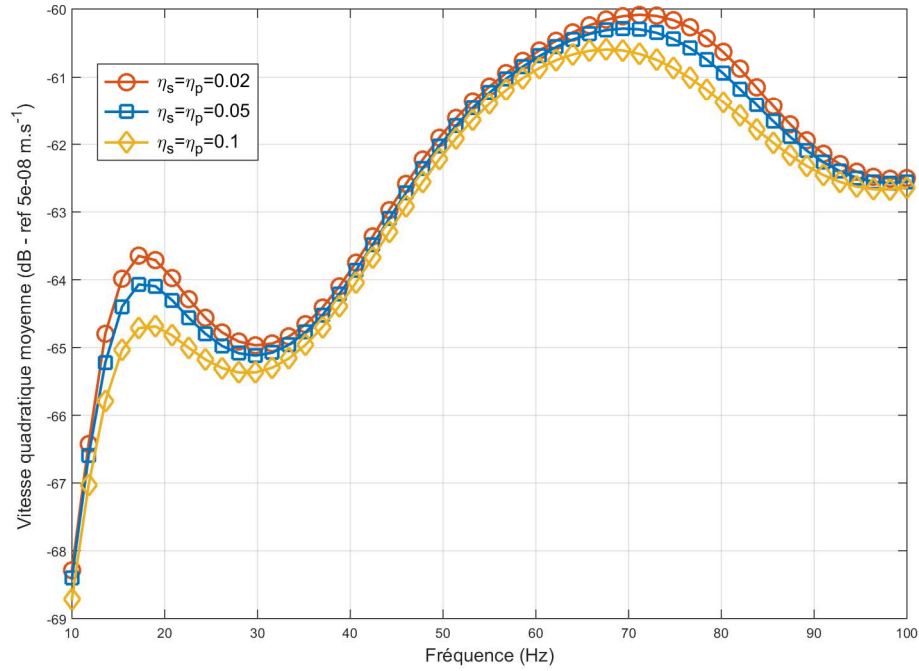


FIGURE 2.13 – Comparaison de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée pour différent amortissement interne de sol

portement vibratoire de la plaque que l'onde de dilatation. Ce phénomène était déjà bien connu et est à nouveau confirmé dans ce cas d'étude.

La mise en évidence de l'influence de l'onde de cisaillement est importante dans le sens où elle constituera dans de nombreux cas l'équivalent de l'onde acoustique dans les problématiques de sol. Un exemple d'une telle considération va être introduite dans la section suivante.

3.2 Mise en évidence des phénomènes de raideur et de masse ajoutée sur la vibration totale de la structure

Dans cette section, le phénomène global de masse et de raideur ajoutée à la structure discuté dans la section (2.3), va être mis en évidence sur la vibration globale de la structure.

On considère une plaque carrée en béton ($E_p = 2.5 * 10^{10} Pa$, $\rho_p = 2500 Kg.m^{-3}$, $\nu_p = 0.3$, $\eta_p = 0.05$) de côté $L_x = L_y = 6m$ et d'épaisseur $h_p = 0.2m$. La plaque est excitée en son centre par un effort d'amplitude $1N$ jusqu'à la section 6, les caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque resteront les mêmes. On s'intéresse ici à la vitesse quadratique moyenne de la plaque dans le cas où l'on supprime les effets résistifs du couplage de la plaque avec le sol i.e $Re(Z_{nmpq}) = 0$. Ainsi seuls les effets de masse et de raideur ajoutée par le sol sur la plaque seront pris en compte dans le couplage. Cette vitesse quadratique moyenne n'est cependant pas réalisable expérimentalement mais elle a l'intérêt de mieux comprendre les phénomènes de couplage en jeu.

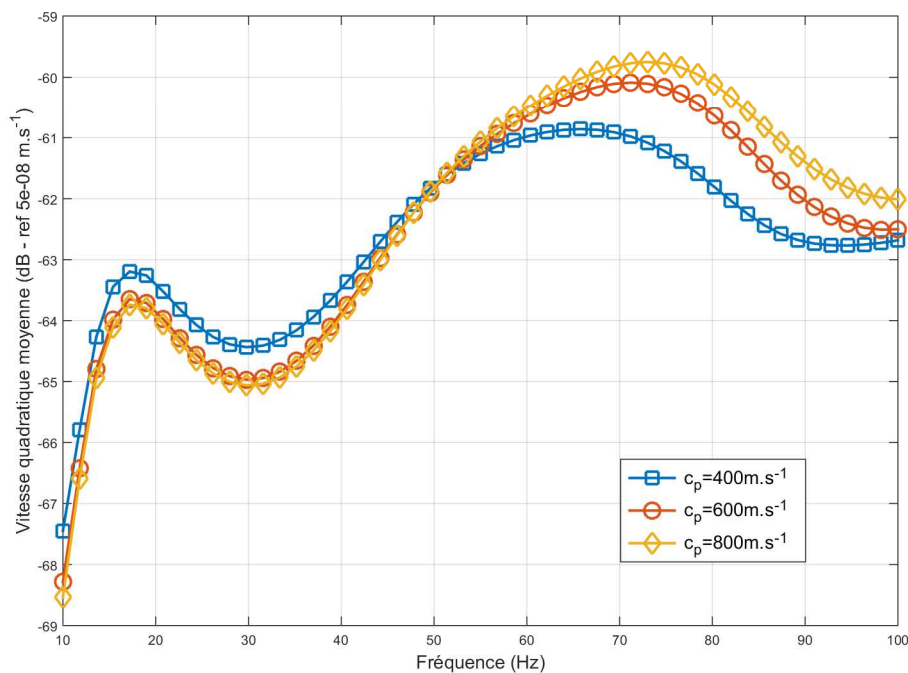


FIGURE 2.14 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque couplée au sol pour différentes valeurs de c_p avec $c_s = 160 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}$

La figure (2.16) correspond à la vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol sans effets résistifs dans le cas de deux sols différents :

- sol 1, mou : $c_s = 160 \text{ m.s}^{-1}$, $c_p = 600 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}$
- sol 2, moyen : $c_s = 250 \text{ m.s}^{-1}$, $c_p = 600 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}$

On trace également la vitesse quadratique moyenne de la plaque non couplée à un milieu extérieur. La référence ici est la courbe carré-bleue qui correspond à la vitesse quadratique moyenne de la plaque non-couplée au sol. On rappelle que les phénomènes de masse ajoutée se traduisent par un décalage des pics de résonance par rapport à la plaque non couplée vers les basses fréquences. Il s'agit d'un phénomène classique en acoustique notamment lors d'un couplage avec un fluide lourd tel que l'eau. Le phénomène de raideur ajoutée se traduit quand à lui par un décalage des pics de résonance par rapport à la plaque non couplée vers les hautes fréquences. Comme mentionné dans la section (2.3), ce phénomène est nouveau tel qu'il est présenté. Dans le cas d'une plaque non couplée avec un milieu extérieur, le pic de résonance se situe à 17Hz et 87Hz pour le mode (1,1) et (1,3). Dans le cas du couplage avec le sol 1, le pic de résonance du mode (1,1) se situe à 19Hz ce qui traduit un effet de raideur ajoutée. En revanche la résonance du mode (1,3) couplée se situe à 73Hz ce qui correspond à un phénomène de masse ajoutée. Dans le cas du

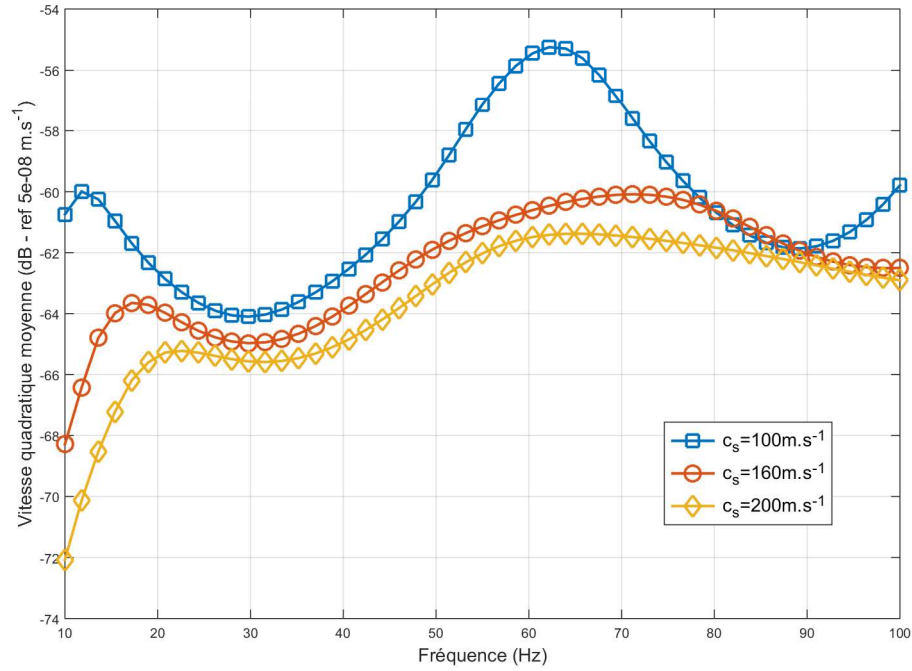


FIGURE 2.15 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque couplée au sol pour différentes valeurs de c_s avec $c_p = 600 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta_p = 0.02$, $\eta_s = 0.02$ et $\rho = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}$

sol 2, le sol apporte de la raideur ajoutée sur cette plage de fréquence plus large.

Ces résultats sont cohérents avec la physique du problème dans le sens où l'augmentation de la célérité de cisaillement est couramment interprétée comme une rigidification du sol. Dans le cas présent l'augmentation de la célérité de cisaillement décale les pics de résonance couplés à des fréquences plus hautes traduisant la raideur ajoutée par le sol sur la plaque. Il faut garder à l'esprit que dans le cas d'un sol monocouche, la raideur ajoutée est présente à basse fréquence jusqu'à une certaine fréquence puis le sol apporte de la masse ajoutée. A partir du moment où l'on est dans la zone de masse ajoutée, il n'y aura pas de nouvelle transition vers de la raideur ajoutée. Il s'agit donc de connaître la fréquence de transition entre les phénomènes de masse ajoutée et de raideur ajoutée pour les sols monocouche. Le changement s'effectue lorsqu'il y a coïncidence de la célérité des ondes de flexion de la plaque avec la célérité des ondes de Rayleigh. (correspondant alors aux ondes de surface) :

$$c_R = c_f(\omega) \quad (2.58)$$

La fréquence de coïncidence des célérités de ces deux ondes peut s'écrire (comme en acoustique) :

$$f_c = \frac{c_R^2}{2\pi h_p} \sqrt{\frac{12\rho_p(1 - \nu_p^2)}{E_p}} \quad (2.59)$$

Dans le cas de sol monocouche, la célérité des ondes de cisaillement et de Rayleigh

sont quasi-identiques. La fréquence de coïncidence vaut 20Hz dans le cas du sol 1 et 30Hz dans le cas du sol 2. On constate bien qu'au delà de ces fréquences, on a de la masse ajoutée et en dessous on a de la raideur ajoutée.

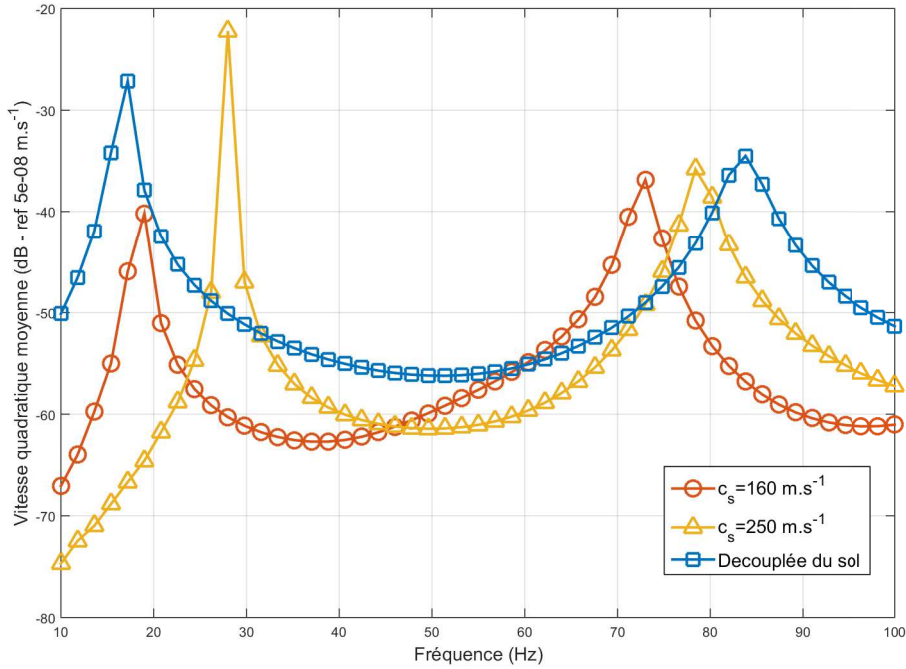


FIGURE 2.16 – Comparaison de la vitesse quadratique moyenne entre une plaque couplée au sol sans partie résistive ($Re(Z_{nmpq}) = 0$) et une plaque non couplée

Le comportement vibratoire de la plaque couplée a mis en évidence le comportement en masse et raideur ajoutée apportée à la surface du sol. Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation dans le sol suite à l'excitation de la plaque couplée.

3.3 Décroissance vibratoire à la surface du sol

La décroissance vibratoire à la surface du sol correspond au niveau de vitesse vibratoire du sol en différents points de la surface du sol. Cette décroissance est fortement liée à l'amortissement interne du sol, phénomène très limité en acoustique, mais également à la divergence géométrique.

Dans le cas d'un sol monocouche qu'on excite ponctuellement directement à la surface du sol, sans structure couplée, on peut donner la forme simple du déplacement vibratoire à la surface du sol [Barkan(1962), Foti et al.(2014) Foti, Lai, Rix, and Strobbia] :

$$|u_z(r, \omega)| = F \frac{e^{-\alpha_R r}}{\sqrt{r}} \quad (2.60)$$

où r est la distance à la source, F l'amplitude de l'effort injecté et α_R l'amortissement des ondes de Rayleigh. On voit bien dans cette formule que le terme en

$\frac{1}{\sqrt{r}}$ traduit la divergence géométrique des ondes de Rayleigh tandis que α_R traduit l'amortissement interne du sol en s'éloignant du point d'excitation.

Les ondes de Rayleigh sont les ondes qui se propagent à la surface du sol. Elles correspondent à une combinaison à la surface du sol des deux ondes de volume. Ce sont ces ondes de Rayleigh que l'on mesure généralement et qui sont les plus énergétiques. On notera également que dans le cas d'un sol monocouche semi-infini, la célérité des ondes de Rayleigh est quasi identique à celle des ondes de cisaillement.

En revanche dans le cas où l'excitation du sol se fait via une structure et que l'on étudie la décroissance simple du champ proche, il n'est plus possible d'obtenir une loi de décroissance de la forme (2.60). En effet il existe de nombreuses contributions des ondes qui se propagent à la surface du sol. Ces contributions ondulatoires se réorganisent entre elles dans le champ proche difficile à étudier en général. [Malecki(1969)]

On donne un exemple de décroissance à la surface du sol à 2m, 4m, 8m et 16m de la plaque excitée en son centre sur la figure (2.17). Les caractéristiques du sol mou sont : $c_s = 160m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. Le niveau vibratoire à la surface du sol ne suit pas la loi (2.60) où l'on peut observer à certaines fréquences, par exemple à 50Hz, des niveaux vibratoires plus important de 10dB à 4m par rapport au niveau vibratoire à 2m. Globalement, on observe bien en moyenne une chute du niveau vibratoire à la surface en s'éloignant de la structure excitée.

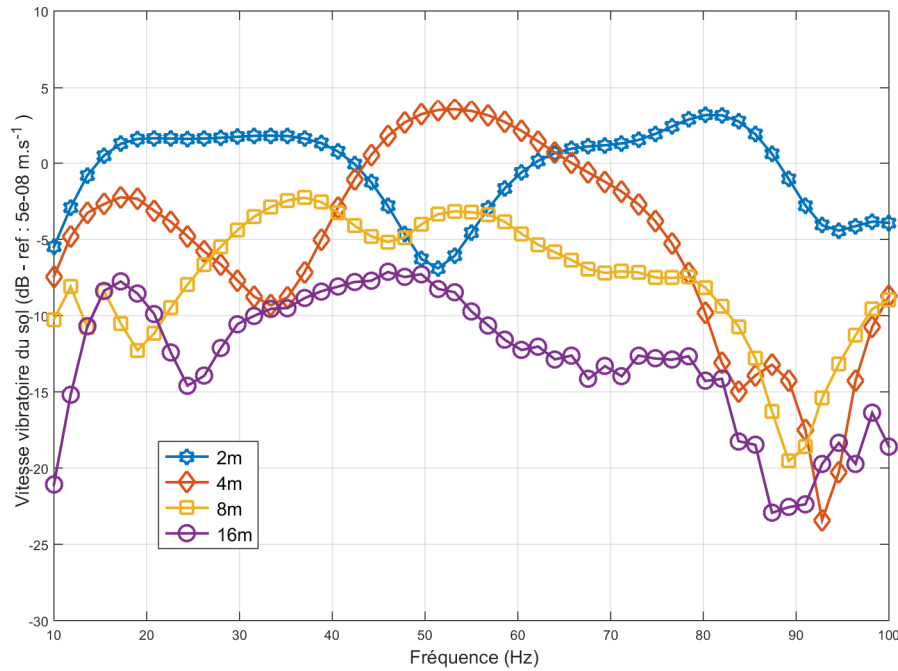


FIGURE 2.17 – Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à différentes distances de la plaque : 2m, 4m, 8m et 16m pour un amortissement interne de sol de $\eta_s = \eta_p = 0.02$

On montre sur la figure (2.18) l'influence de l'amortissement interne du sol sur

la décroissance vibratoire. On considère donc dans ce cas un sol mou ayant les caractéristiques suivantes : $c_s = 160m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.1$, $\eta_p = 0.1$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. Les points les plus proches de la structure i.e à 2m et 4m sont relativement peu influencés par l'amortissement du sol. On note un écart ne dépassant pas 5dB en moyenne. En revanche à partir de 8m, les différences commencent à être importante de l'ordre de 10dB à 20dB. Ces écarts sont plus ou moins importants en fonction de la fréquence, les hautes fréquences étant atténuées de façon plus importante que les basses fréquences.

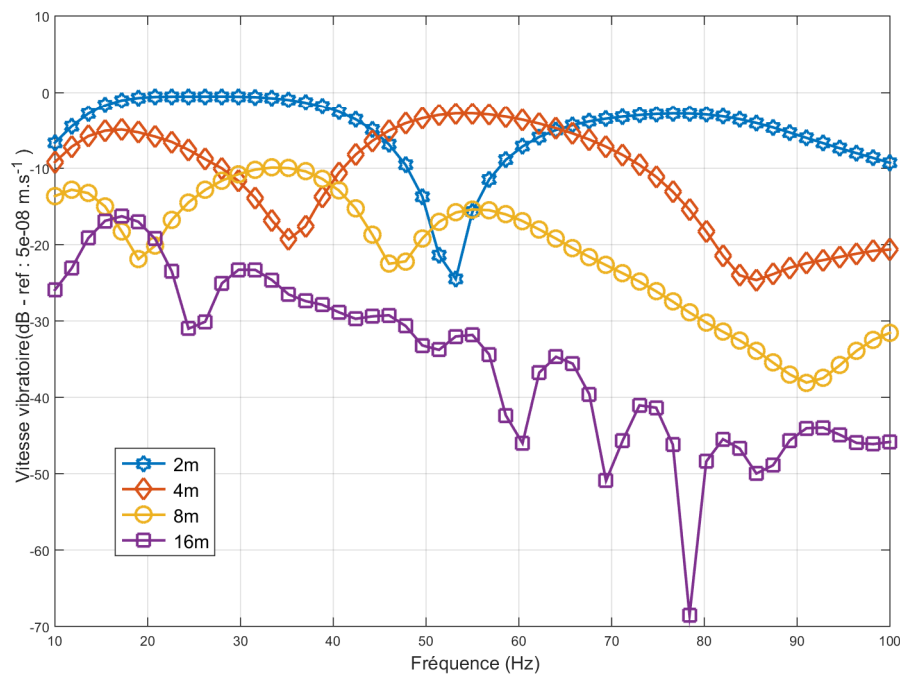


FIGURE 2.18 – Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à différentes distances de la plaque : 2m, 4m, 8m et 16m pour un amortissement interne de sol de $\eta_s = \eta_p = 0.1$

Les figures (2.19), (2.20) et (2.21) mettent en avant les phénomènes dus à l'amortissement du sol sur la décroissance vibratoire. On compare donc le niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à 2m, 8m, et 16m de la plaque pour deux amortissements du sol 2% et 10%. On observe un phénomène d'amortissement à savoir des pics d'anti-résonance de plus en plus marqués lorsque l'amortissement augmente. On observe bien ce phénomène sur le niveau vibratoire à 2m de la plaque à 53Hz avec un écart de niveau vibratoire de 20dB entre l'amortissement à 2% et l'amortissement à 10%. L'origine de ces anti-résonances provient d'un phénomène d'interférence destructrice entre l'ensemble des ondes arrivant au point d'écoute. Le niveau vibratoire des ondes arrivant à ce point est d'autant plus faible que l'amortissement du sol est important. Le phénomène d'anti-résonance se trouve très marqué pour les plus forts amortissements car les niveaux vibratoires sont très faibles. Ces phénomènes sont également présents dans des applications acoustiques ou de vibrations de structure.

Cette section nous a permis d'observer des décroissances à la surface du sol et

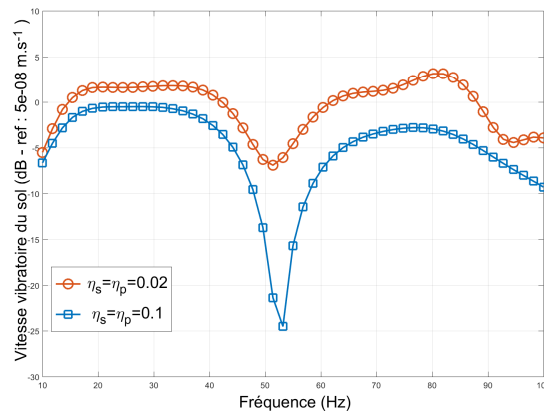


FIGURE 2.19 – Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (2m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%

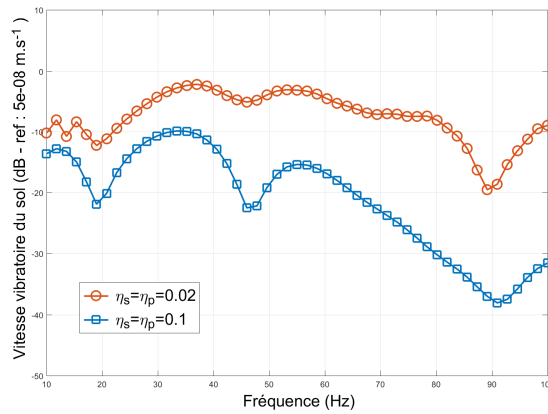


FIGURE 2.20 – Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (8m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%

notamment de mettre en avant la complexité du champ proche de la structure excitatrice. Afin d'obtenir une meilleure vue d'ensemble des phénomènes de propagation à la surface et dans le sol, des cartographies vibratoires vont être présentées dans la section suivante.

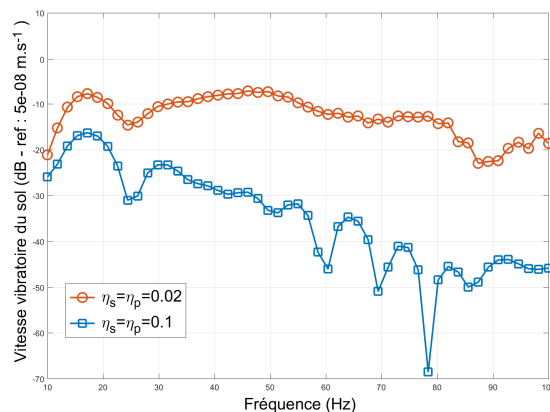


FIGURE 2.21 – Niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à (16m;3m) de la plaque pour un amortissement interne du sol de 2% et 10%

3.4 Cartographie de niveaux vibratoires dans le sol et sur la structure

On présente ici des cartographies vibratoires à la surface du sol. Les caractéristiques du sol mou sont les suivantes : $c_s = 160m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. La figure (2.22) correspond aux niveaux de vitesse vibratoire à la surface du sol à 80Hz. Le trait en noir représente les limites de la plaque excitée. On observe la contribution majoritaire du mode (1,3) sur les vibrations de la plaque. En ce qui concerne les vibrations à la surface du sol, on retrouve les phénomènes de champ proche. En effet pour un sol homogène, la célérité de Rayleigh est approximativement de $147m.s^{-1}$ ce qui donne une longueur d'onde de Rayleigh de 1.84m. Dans la zone proche de la plaque, la longueur d'onde de Rayleigh ne vérifie pas ce critère à cause de la contribution de l'ensemble de la surface de la plaque dans la vibration du sol. En revanche, en s'éloignant de la plaque i.e à environ 20m perpendiculairement à un coté de la plaque, on retrouve plus ou moins ce critère de longueur d'onde.

On observe également un second phénomène typique du champ proche dans la diagonale de la plaque. Il existe des raies de chute de niveaux de vitesse vibratoire correspondant à un phénomène d'interférence. Ce phénomène est issu de la propagation des ondes d'un coté de la plaque et de son coté adjacent. La contribution du mode (1,3) est la plus importante à cette fréquence et agit comme un ensemble de monopoles excitant le sol. La contribution des différents monopoles engendre ainsi des interférences en des points du sol. Lorsque la fréquence augmente un nombre plus important de monopole équivalent excite le sol créant de plus en plus de raies vibratoires de ce type.

On montre sur la figure (2.23), une cartographie de vitesse vibratoire dans une section du sol en fonction de la profondeur. Cette section a été prise pour $y = 3m$ ce qui permet de se situer dans l'axe de l'excitation sur la dalle. On retrouve ici un phénomène bien connu de la propagation vibratoire dans la profondeur à savoir que ces ondes sont des ondes évanescentes. On observe une chute du niveau vibratoire de 15dB à 10m sous la structure.

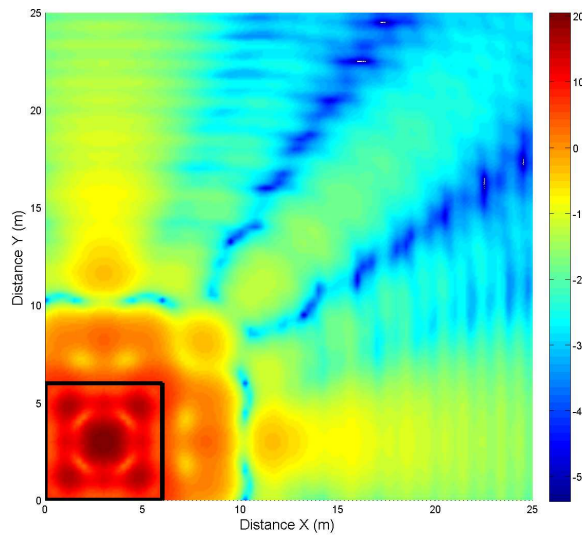


FIGURE 2.22 – Cartographie de la vitesse vibratoire de la plaque couplée au sol et du sol à la surface à la fréquence $f = 80Hz$

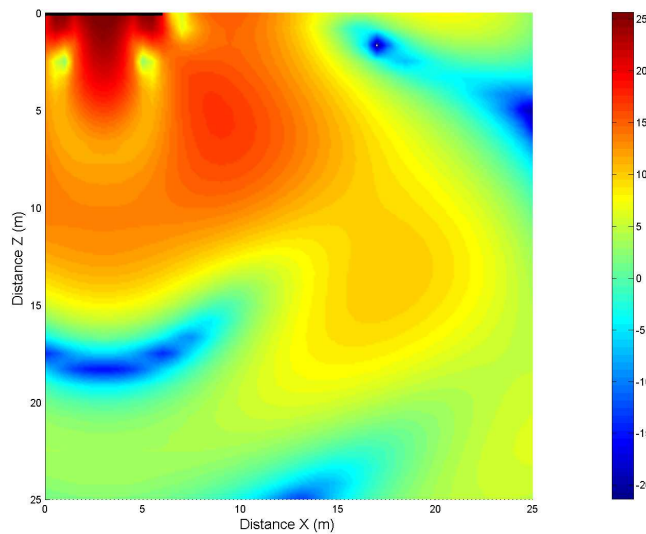


FIGURE 2.23 – Cartographie de la vitesse vibratoire de la plaque couplée au sol et du sol dans la section de la plaque en fonction de la profondeur à la fréquence $f = 80Hz$

Dans cette section, nous avons étudié un ensemble de résultats numériques ce qui a permis de mettre en avant les principaux phénomènes en jeu en ce qui concerne l'interaction sol-plaque. Les effets de masse ajoutée, de raideur ajoutée et d'amortissement ajouté ont été explicitement mis en évidence. Un critère fréquentiel a été établi afin de distinguer les zones de raideur ajoutée et de masse ajoutée globale. Ce critère présente un grand intérêt car il donne une information sur le type de

couplage que l'on considère.

4 Comparaison avec l'acoustique

Dans cette section, nous nous intéressons à la comparaison des impédances intermodale de rayonnement dans le cas d'un couplage fluide et dans le cas d'un couplage élastique. Cette comparaison est d'autant plus intéressante que toute la formulation du couplage sol-structure est issue de l'acoustique. Cette comparaison mettra notamment en évidence le fort couplage qu'il existe lorsque l'on couple une plaque avec un sol. On rappelle tout d'abord la formulation du cas d'une plaque non-bafflée couplée à un fluide puis on présentera une comparaison de quelques impédances intermodales. [Grau and Laulagnet(Submitted in 2015 - under review), Grau and Laulagnet(2014b), Pierce(1989)]

4.1 Modèle acoustique correspondant

La propagation des ondes dans un fluide est régie par deux équations à savoir l'équation de Helmholtz et l'équation d'Euler dont on donne la forme dans l'équation (2.61). Ces équations sont issues de trois hypothèses à savoir que le cisaillement est négligeable dans le milieu, que le milieu est homogène et isotrope et que l'on considère des petits déplacements. La première équation fournit la donnée de la pression acoustique dans un milieu tandis que la seconde équation, issue de l'application de la seconde loi de Newton sur un petit élément de volume, fournit une relation entre la pression et la vitesse acoustique.

De la même façon que dans les sections précédentes, la plaque en vibration de flexion respecte les hypothèses de Kirchhoff-Love. Elle est excitée par un effort $F(x, y)$ et est couplée uniformément sur sa surface par le fluide environnant. L'équation du mouvement de cette plaque est donnée par l'équation (2.61).

$$\Delta p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0 \quad (2.61a)$$

$$u_{z-acou}(x, y, z) = \frac{1}{\rho_o \omega^2} \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.61b)$$

$$D_p^* \nabla^4 w(x, y) - \rho_p h_p \omega^2 w(x, y) = F(x, y) - p(x, y, z = 0) \quad \forall (x, y) \in [0; L_x] \times [0; L_y] \quad (2.61c)$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde acoustique, $D_p^* = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\nu_p^2)}(1 + j\eta_p)$ est la rigidité de flexion complexe de la plaque et $p(x, y, z = 0)$ est la pression acoustique exercée sur la plaque. $F(x, y)$ est l'effort ponctuel d'amplitude F_0 qui est appliqué sur la plaque au point (x_0, y_0) et $u_{z-acou}(x, y, z)$ est le déplacement acoustique suivant l'axe z .

A la frontière du milieu fluide, c'est à dire en $z = 0$, le champ de pression est entièrement défini par la condition aux limites (2.62). Cette condition de pression nulle à la frontière est classiquement appelée *condition aux limites non bafflée* par opposition au cas de *condition aux limites bafflée* qui consiste à considérer le champ de déplacement nul à la frontière. [Laulagnet(1998)] Le problème non bafflé est le

problème équivalent à celui présenté dans la section précédente d'une plaque couplée au sol. Le problème acoustique non-bafflé est un problème complexe et très singulier à résoudre par rapport au cas bafflé. On pourra se référer aux travaux de Laulagnet et Attala qui ont résolu simultanément le problème par des techniques différentes. On insistera sur le fait que le problème bafflé en acoustique est le problème canonique tandis que le problème non bafflé dans le sol est le problème canonique.

$$p(x, y, z = 0) = \begin{cases} p(x, y, z = 0) & \forall (x, y) \in [0; L_x] \times [0; L_y] \\ 0 & \forall M(x, y) \notin [0; L_x] \times [0; L_y] \end{cases} \quad (2.62)$$

La présentation du problème non bafflé ci-dessus diffère légèrement de celle formulée par Laulagnet utilisant les fonctions de Green mais se ramène finalement aux mêmes équations. Cette formulation présente l'intérêt d'être équivalente à celle présente dans les sections précédentes pour le couplage sol-structure. Afin de résoudre l'équation (2.61) on effectue une transformée de Fourier 2D spatiale de la pression acoustique ce qui est justifié par le fait que le domaine est défini et infini suivant x et y . Cela ramène le problème à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre dans le domaine de Fourier. On peut alors donner une solution de la forme :

$$\tilde{p}(k_x, k_y, z) = A e^{-j k_z z} \quad (2.63)$$

où A est une constante à déterminer. Les conditions aux limites (2.62) ainsi que l'équation d'Euler (2.61) permettent d'écrire :

$$\tilde{u}_{z-acou}(x, y, z)(k_x, k_y, z = 0) = N(k_x, k_y) \tilde{p}(k_x, k_y, z = 0) \quad (2.64)$$

avec

$$N(k_x, k_y) = \frac{j k_z}{\rho_0 \omega^2} \quad (2.65)$$

où $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. On reconnaît bien la forme identique au cas de couplage d'une plaque avec le sol (2.26). On ne présentera pas la formulation du problème non bafflé complet dans la mesure où la résolution est identique à celle présentée précédemment. Etant donné que seul le milieu change, seul le terme $N(k_x, k_y)$ est impacté par la résolution du problème de couplage d'une plaque avec un milieu environnant.

4.2 Comparaison des impédances intermodales de rayonnement acoustique de plaque non bafflée et vibratoires

Dans ce paragraphe, les parties réelles et imaginaires des impédances intermodales de rayonnement vont être comparées dans le cas d'un couplage acoustique non-bafflé et dans le cas d'un couplage élastique. Manfred Heckl avait déjà été précurseur sur ce type de comparaison en s'intéressant notamment au rayonnement des ondes de compression et de cisaillement dans un milieu élastique homogène excité par un "radiateur plan" [Heckl and Petersson(2005)]. On entend par radiateur plan une déformation du milieu sous forme trigonométrique. L'étude ci-dessous est une continuité de ces travaux, appliqués au cas d'un milieu excité par une plaque mince en vibration de flexion.

Afin de s'affranchir des caractéristiques du milieu, les impédances intermodales sont normalisées par $\frac{\rho c S_p}{4}$ dans le cas acoustique et $\frac{\rho c_p S_p}{4}$ dans le cas du sol. L'impédance intermodale ne dépend que de la surface de couplage avec le milieu donc on considérera une plaque carrée de 6m de coté pour cette étude.

Les figures (2.24), (2.25) et (2.26) correspondent aux réactances de l'impédance intermodale de rayonnement pour les modes (11), (13) et (33). Ces courbes sont tracées en fonction de γ , nombre d'onde adimensionnel, qui est défini en fonction du nombre d'onde acoustique pour le cas non-bafflé et en fonction du nombre d'onde de dilatation pour le couplage avec le sol comme suit :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{k}{\sqrt{(\frac{n\pi}{L_x})^2 + (\frac{m\pi}{L_y})^2}} = \frac{k}{k_{nm}} \text{ cas non - bafflé} \\ \gamma = \frac{k_d}{\sqrt{(\frac{n\pi}{L_x})^2 + (\frac{m\pi}{L_y})^2}} = \frac{k_d}{k_{nm}} \text{ cas élastique} \end{cases} \quad (2.66)$$

Une première différence fondamentale qui avait déjà été évoquée dans les sections précédentes est le fait que dans le cas non-bafflé, la partie imaginaire de l'impédance intermodale est toujours positive traduisant les phénomènes de masse modale ajoutée expliquée dans la première section. En revanche la partie imaginaire de l'impédance intermodale peut être négative et positive dans le cas du couplage avec le sol à l'origine des phénomènes de raideur et masse modale ajoutée. Les deux courbes passent par un maximum à la coïncidence entre le nombre d'onde mécanique et l'onde de dilatation. On note qu'après la fréquence de coïncidence le sol se comporte comme un fluide car la reactance de l'impédance intermodale acoustique tend vers l'impédance intermodale du sol.

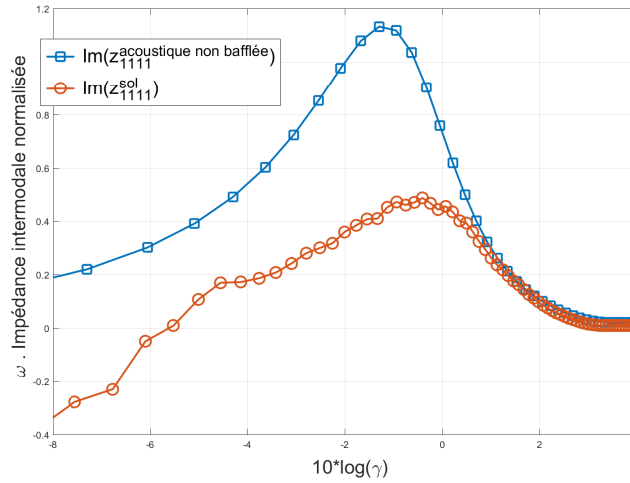


FIGURE 2.24 – Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,1) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé

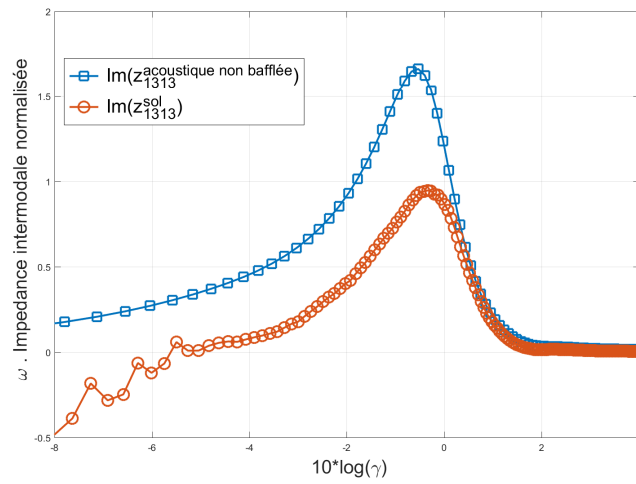


FIGURE 2.25 – Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non baffé

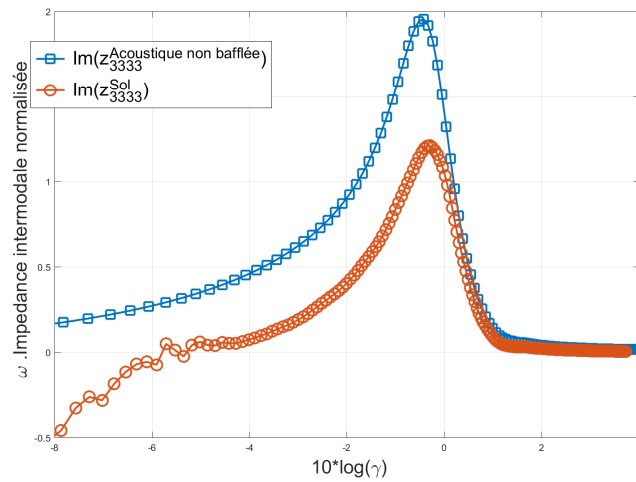


FIGURE 2.26 – Comparaison de la partie imaginaire des impédances intermodales de rayonnement des modes (3,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non baffé

Les figures (2.27), (2.28) et (2.29) correspondent à la résistance des impédances intermodales pour le mode (11), (13) et (33). Elles mettent en avant le fort couplage dans le cas d'un couplage élastique par rapport au couplage acoustique. La résistance de l'impédance intermodale traduit le transfert d'énergie de la plaque au milieu extérieur. En acoustique, il est bien connu qu'en dessous de la fréquence de coïncidence la plaque rayonne faiblement et l'effet resistif domine les phénomènes vibratoires bien que le rayonnement soit plus important dans le cas non-bafflé par rapport au cas bafflé. La courbe carrée-bleue de la figure (2.27) montre, en effet, une forte décroissance pour $\gamma < 1$ de $4dB/\gamma$ pour le mode (11). Cependant cette décroissance est beaucoup plus faible dans le cas du couplage avec un milieu élastique qui correspond à la courbe rond-rouge. Elle est de moins de $0.5dB/\gamma$ pour le mode (11). Ceci est dû à l'onde de cisaillement qui se propage à une vitesse plus lente que l'onde de dilatation. Cette onde participe en plus de l'onde de dilatation au transfert d'énergie en dessous de la fréquence de coïncidence avec l'onde de dilatation. ($\gamma = 1 \rightarrow 10\log(\gamma) = 0$)

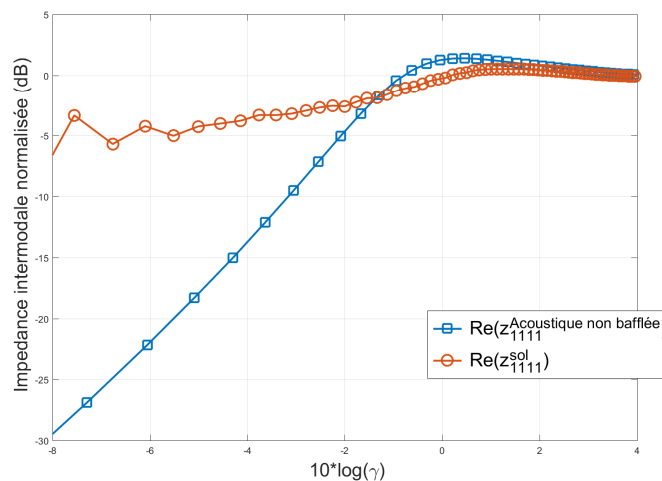


FIGURE 2.27 – Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,1) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé

On peut interpréter la différence entre les deux milieux, fluide et élastique, de la même façon en notant que le cisaillement est responsable de l'importante adaptation d'impédance entre la structure et le milieu élastique, en basse fréquence.

Dans cette section, nous avons mis en évidence des différences fondamentales entre le couplage fluide et le couplage élastique en terme d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire. Notamment nous avons pu voir des écarts importants de transfert d'énergie dans le cas acoustique non bafflé par rapport au cas élastique.

Nous allons maintenant étudier un certain nombre de paramètres nous permettant de comprendre l'interaction sol-structure dans le cas d'un sol stratifié semi-infini. D'un point de vue pratique, les sols sont presque toujours stratifiés ce qui nous amène donc à étudier maintenant l'effet de la stratification du sol.

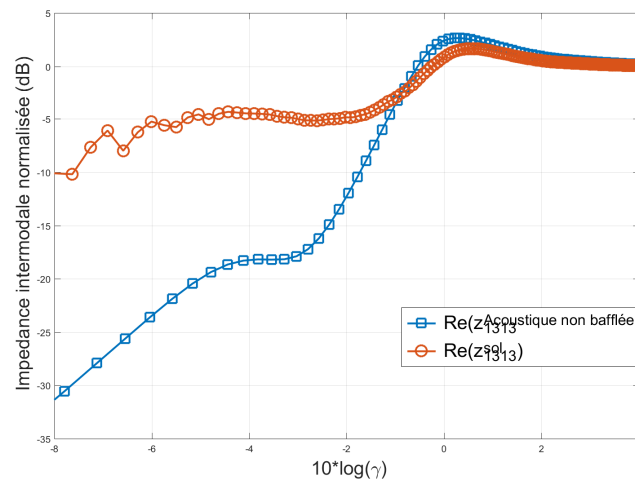


FIGURE 2.28 – Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (1,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflé

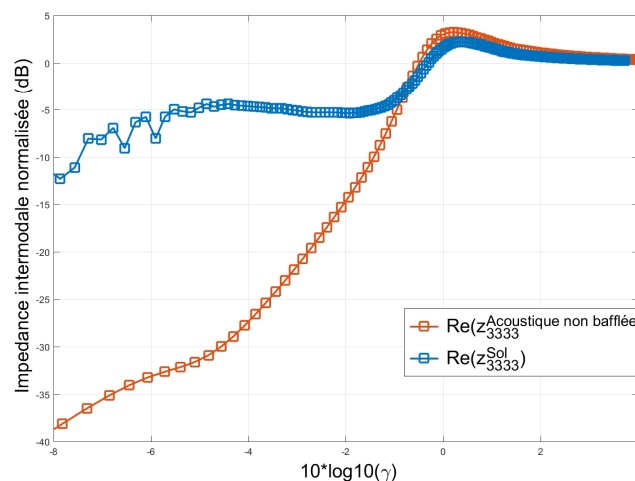


FIGURE 2.29 – Comparaison de la partie réelle des impédances intermodales de rayonnement des modes (3,3) dans le cas d'un couplage élastique et dans le cas d'un couplage acoustique non bafflée

5 Influence de la stratification

Dans cette section, nous allons mettre en évidence les effets de la stratification sur la vibration de la structure. D'un point de vue pratique un sol est, dans une large majorité de cas, stratifié. [Kausel(2011), Ewing et al.(1957)Ewing, Jardetzky, and Press, Kausel and Roesset(1981)] La modélisation d'un sol stratifié est bien connue depuis plusieurs dizaines d'années. Nous rappelons dans un premier temps la modélisation du problème puis des exemples de couplage sont présentés notamment l'effet sur les impédances intermodales de rayonnement.

5.1 Formulation du problème d'un sol stratifié

De la même façon que dans la section précédente, la prise en compte de la stratification du sol dans le couplage d'une plaque en vibration de flexion n'impacte que le terme $N(k_x, k_y)$ de l'équation (2.26). Seul le calcul du terme $N(k_x, k_y)$ va donc être présenté ici pour le cas stratifié.

En se replaçant dans le cas initial d'un sol homogène isotrope et linéaire par strate, les équations du mouvement pour chaque couche n s'écrivent avec les équations de Navier à savoir :

$$\mu_n \Delta \vec{u}_n(x, y, z) + (\mu_n + \lambda_n) \text{grad}(\text{div}(\vec{u}_n(x, y, z))) = \rho_n \frac{\partial^2 \vec{u}_n(x, y, z)}{\partial t^2} \quad (2.67)$$

où \vec{u}_n est le vecteur déplacement de la couche n et (μ_n, λ_n) les coefficients de Lamé de la couche n . Une décomposition de Helmholtz sur chaque couche est effectuée :

$$\vec{u}_n(x, y, z) = \text{grad}(\phi_n(x, y, z)) + \text{rot}(\vec{\psi}_n(x, y, z)) \quad (2.68)$$

ce qui permet d'obtenir une équation d'onde sur l'onde de cisaillement et l'onde de dilatation par couche de la même forme que (2.15). Une transformée de Fourier 2D spatiale dans la direction x et y est effectuée ce qui mène à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre dans le domaine de Fourier sur chaque couche :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{\phi}_n}{dz^2}(k_x, k_y, z) + k_{1n}^2 \tilde{\phi}_n(k_x, k_y, z) = 0 \\ \frac{d^2 \vec{\psi}_n}{dz^2}(k_x, k_y, z) + k_{2n}^2 \vec{\psi}_n(k_x, k_y, z) = \vec{0} \end{cases} \quad (2.69)$$

avec $k_{1n} = \sqrt{k_{dn}^2 - k_x^2 - k_y^2}$ et $k_{2n} = \sqrt{k_{sn}^2 - k_x^2 - k_y^2}$ les nombres d'onde réduit de dilatation et de cisaillement respectivement de la couche n . k_{dn} et k_{sn} correspondent au nombre d'onde de dilatation et de cisaillement pour la couche n .

La solution de cette équation différentielle aux potentiels se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_n(k_x, k_y, z) = A_n^i e^{-jk_{1n}z} + A_n^r e^{jk_{1n}z} \\ \tilde{\psi}_{x-n}(k_x, k_y, z) = B_n^i e^{-jk_{2n}z} + C_n^r e^{jk_{2n}z} \\ \tilde{\psi}_{y-n}(k_x, k_y, z) = C_n^i e^{-jk_{2n}z} + B_n^r e^{jk_{2n}z} \\ \tilde{\psi}_{z-n}(k_x, k_y, z) = D_n^i e^{-jk_{2n}z} + D_n^r e^{jk_{2n}z} \end{cases} \quad (2.70)$$

On a donc 8 amplitudes aux potentiels inconnues par couche excepté pour la dernière couche où le terme en $e^{jk_{1n}z}$ et $e^{jk_{2n}z}$ n'existe pas car il n'y a pas de réflexion d'onde. Afin de déterminer les amplitudes des potentiels, on utilise les conditions de continuité des contraintes et des déplacements à l'interface de chaque couches à savoir :

$$\begin{cases} \sigma_{xz-n}(x, y, z = h_n) = \sigma_{xz-n+1}(x, y, z = h_n) \\ \sigma_{yz-n}(x, y, z = h_n) = \sigma_{yz-n+1}(x, y, z = h_n) \\ \sigma_{zz-n}(x, y, z = h_n) = \sigma_{zz-n+1}(x, y, z = h_n) \end{cases} \quad (2.71)$$

$$\begin{cases} u_{x-n}(x, y, z = h_n) = u_{x-n+1}(x, y, z = h_n) \\ u_{y-n}(x, y, z = h_n) = u_{y-n+1}(x, y, z = h_n) \\ u_{z-n}(x, y, z = h_n) = u_{z-n+1}(x, y, z = h_n) \end{cases} \quad (2.72)$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution, il faut également prendre en compte une condition de jauge pour chaque couche ce qui donne $\text{div}(\vec{\psi}_n) = 0$. On donne en annexe les détails du calcul pour le cas bicouche que nous allons considérer maintenant. Il faut également ajouter la condition aux limites en contrainte à l'interface énoncé dans la section précédente à l'équation (2.21).

Dans les prochaines sections, les résultats numériques de cas de couplage sol-plaque avec un sol stratifié vont être présentés.

5.2 Mise en évidence de la résonance de la couche

Afin d'illustrer les effets de la stratification du sol, nous allons considérer un cas particulier pour lequel on observe un phénomène de résonance. Nous considérons dans ce premier paragraphe un sol libre en surface qui n'est couplé à aucune structure. Dans le cas d'un sol monocouche, seule l'onde de Rayleigh peut se propager en surface. En revanche, lorsque le sol devient stratifié, une nouvelle onde peut se propager en surface, il s'agit des ondes de Love mise en évidence par A.E.H. Love en 1911 [Love(2013)]. Dans le cas présent elles vont jouer un rôle important.

Lorsque l'on considère l'étude vibratoire d'un sol stratifié, on s'intéresse souvent à la résonance de la première couche notamment lorsque celle-ci se situe sur une couche plus raide. On entend par résonance une amplification du niveau de déplacement vibratoire en présence de couche par rapport à l'absence de couche. Cette résonance, appelée aussi fréquence de coupure, est donnée par la relation suivante pour le mode n : [Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia]

$$\frac{\omega_n h_1}{c_{s1}} = \frac{\pi(n-1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_{s1}}{c_{s2}}\right)^2}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

où h_1 est la hauteur de la première couche et c_{s1} et c_{s2} la célérité de cisaillement de la première et deuxième couche respectivement. Ces fréquences de résonance sont la conséquence de l'existence des ondes de Love qui sont des ondes horizontales polarisées (onde SH).

Pour $n=2$, qui correspond à la première fréquence de résonance, on obtient :

$$f_2 = \frac{c_{s1}\pi}{2\pi h \sqrt{1 - \left(\frac{c_{s1}}{c_{s2}}\right)^2}} \quad (2.74)$$

Dans le cas où $c_{s1} \ll c_{s2}$, la formule se simplifie et donne :

$$f_{2 \text{ Love}} \approx \frac{c_{s1}}{2h_1} \quad (2.75)$$

Le sol bicouche considéré a les caractéristiques mécaniques et géométriques suivantes :

Sol	C_s	C_p	η_p	η_s	ρ	Epaisseur
Couche 1	160	600	0.02	0.02	1200	1
Couche 2	600	1200	0.02	0.02	1500	∞

TABLE 2.2 – Caractéristiques mécaniques et géométrique du sol bicouche

La figure (2.30) (gauche) correspond à la vitesse vibratoire du sol excité par un effort ponctuel à sa surface et moyennée sur une distance de 5m à 25m. On représente les deux cas de figures qui nous intéressent à savoir le cas d'un sol monocouche et celui d'un sol bicouche de la table (2.2).

Le sol monocouche considéré aura les caractéristiques de la couche 1 du sol bicouche. On observe bien la fréquence de résonance mentionnée ci-dessous qui se situe à 80Hz. En dessous de 60Hz l'effet de la couche inférieure plus raide tend à faire chuter le niveau vibratoire. En revanche, après la fréquence de résonance à 80Hz, le niveau vibratoire du sol bicouche tend vers celui du sol monocouche car, les ondes étant évanescence dans la profondeur, l'influence de la deuxième couche est de plus en plus faible en montant en fréquence.

La figure (2.30) (droite) correspond à la vitesse vibratoire de surface pour différents cas de hauteur de couche 1, 1m, 2m et 5m. On observe ainsi les phénomènes de résonance, notamment la résonance du premier mode qui est la plus importante. Pour $h=1m$, la formule (2.75) donne une résonance de 80Hz. Pour $h=2m$, on a 40Hz et pour $h=5m$ on a 16Hz. Ces fréquences se retrouvent bien sur les courbes de la figure (2.30) (droite).

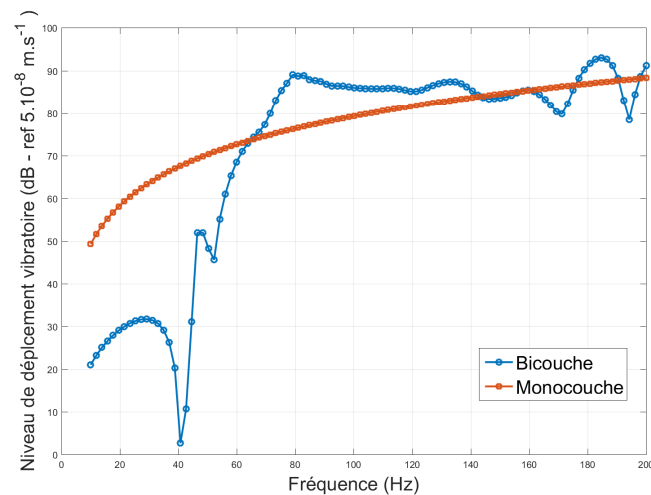


FIGURE 2.30 – Vitesse vibratoire verticale de la surface du sol moyennée sur une distance de 5m à 25m suite à un effort ponctuel appliqué à la surface du sol

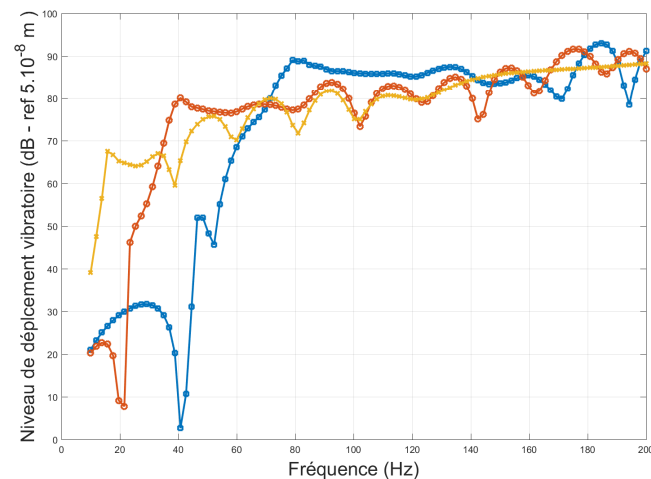


FIGURE 2.31 – Vitesse vibratoire verticale de la surface du sol moyennée sur une distance de 5m à 25m suite à un effort ponctuel appliqué à la surface du sol pour différentes hauteur de couche

On s'intéresse maintenant à la réponse vibratoire de la plaque sur un sol bicouche. La figure (2.32) représente la vitesse quadratique moyenne de la plaque couplée à un sol monocouche (trait rouge rond) et à un sol bicouche (trait bleu carré). On observe dans le second cas une fréquence de résonance à 78Hz qui entraîne une amplification de 10dB de la vitesse quadratique moyenne par rapport au cas monocouche. Cette résonance est d'autant plus amplifiée qu'elle provient d'une correspondance entre la fréquence de résonance mécanique de la structure du mode (13) de la plaque et de la fréquence de résonance de la première couche donnée par la formule (2.75). De même que dans le cas du sol libre, la vitesse quadratique moyenne chute significativement en dessous de 40Hz dans le cas bicouche par rapport au cas monocouche. Ceci est

du à la deuxième couche plus raide qui apporte de la raideur et vient bloquer la structure.

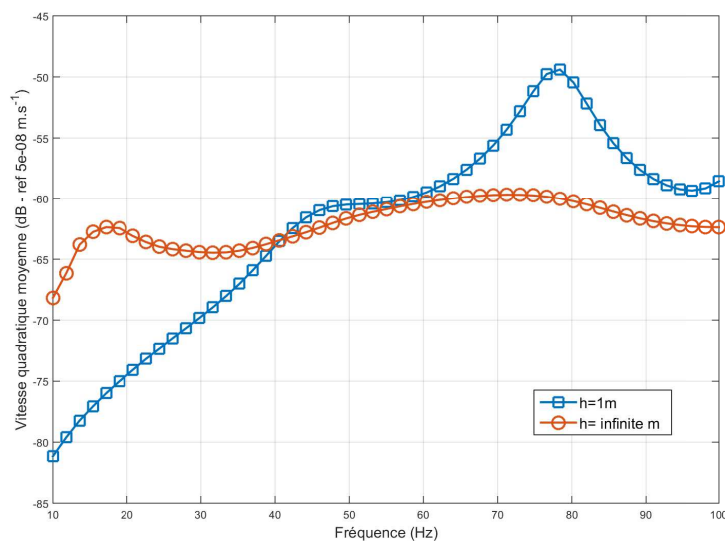


FIGURE 2.32 – Vitesse quadratique moyenne d'une plaque couplée au sol dans le cas d'un sol bicouche

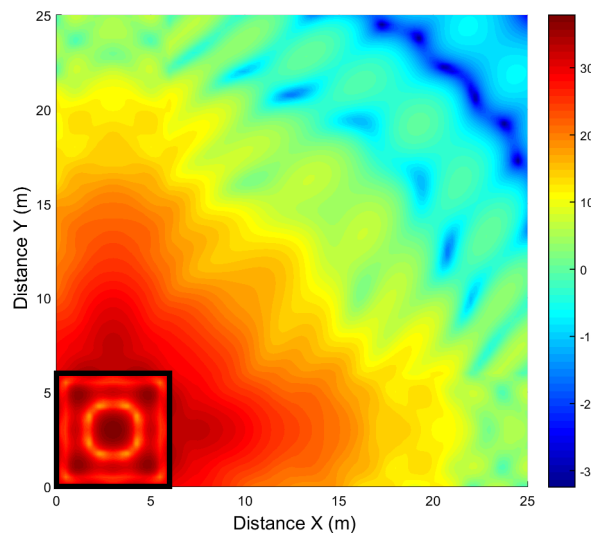


FIGURE 2.33 – Cartographie du niveau de vitesse vibratoire à la surface du sol à 80 Hz pour un sol bicouche

La figure (2.33) représente une cartographie du sol à la surface $z = 0$ autour de

la fréquence de résonance à $f = 80\text{Hz}$. En comparaison avec la figure (2.22), on observe une amplification vibratoire dans le champ proche due à la stratification.

Nous pouvons également observer sur l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire des changements significatifs dus à la stratification. Ces changements vont être présentés dans la section suivante.

5.3 Effet de la stratification sur l'impédance intermodale de rayonnement

Les impédances intermodales sont significativement changées dues à la stratification. On rappelle que la partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire peut être interprétée comme des phénomènes de masse modale ajoutée et de raideur modale ajoutée. On a notamment vu dans la section 2.3 qu'à basse fréquence, le phénomène de raideur ajoutée modale apparaît puis en montant en fréquence le phénomène de masse modale ajoutée apparaît au détriment de la raideur modale ajoutée puis tend vers 0. Dans le cas d'un sol stratifié, il existe plusieurs plages fréquentielles de masse et de raideur modale ajoutée comme le montre les figures (2.34) et (2.35). Dans le cas du mode (1,1), on observe un premier changement de signe à 60Hz pour lequel la partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire devient positif. De 110Hz à 165Hz, la partie imaginaire de l'impédance redevient négative puis au delà de 165Hz elle reste positive. A basse fréquence, la partie imaginaire de l'impédance dans le cas bicouche vaut -200Kg.s^{-1} à 17Hz et tandis que dans le cas monocouche elle vaut -11Kg.s^{-1} à 17Hz traduisant une importante raideur ajoutée due à la stratification. Cette raideur ajoutée est créée par la deuxième couche plus raide et est à l'origine de l'importante chute de la vitesse quadratique moyenne de la plaque.

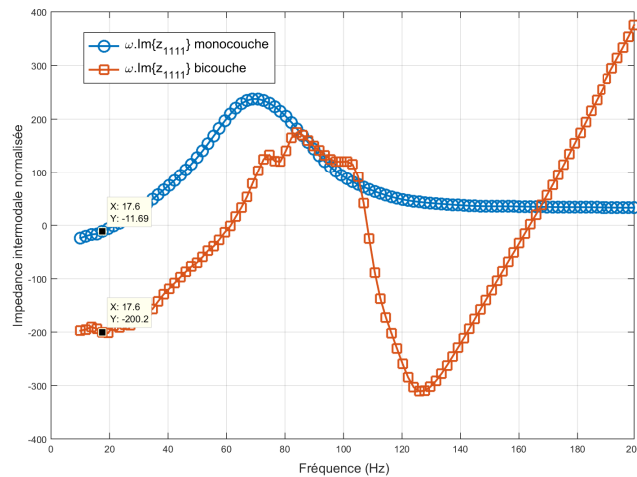


FIGURE 2.34 – Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (11) dans le cas monocouche et bicouche

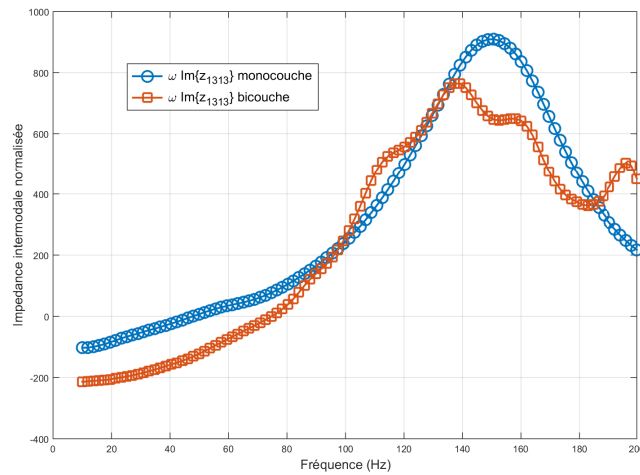


FIGURE 2.35 – Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (13) dans le cas monocouche et bicouche

La partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire à l'origine du transfert d'énergie dans le milieu élastique est représentée sur les figures (2.36) et (2.37). On observe que les valeurs sont beaucoup plus faibles dans le cas d'un sol bicouche que dans le cas d'un sol monocouche. L'impédance intermodale du mode (1,3) à l'origine de la résonance sur la vitesse quadratique moyenne de la plaque, vaut $0.3Kg.s^{-1}$ pour le monocouche et $0.06Kg.s^{-1}$ pour le bicouche à 80Hz. Ainsi le transfert d'énergie est moins important en présence de la couche inférieure qui renvoie les ondes sur la dalle et par contre-coup de l'énergie.

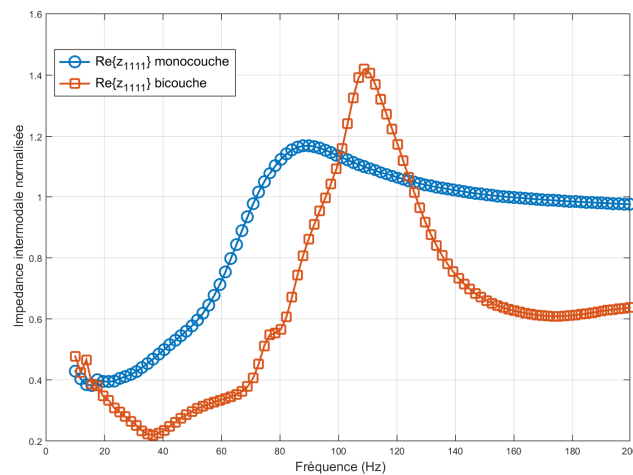


FIGURE 2.36 – Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (11) dans le cas monocouche et bicouche

Dans ce paragraphe, nous avons mis en évidence, l'influence que peut avoir un sol stratifié sur les vibrations de la plaque. Notamment l'influence des ondes de Love a montré des amplifications vibratoires de la structure qui peuvent être significatives.

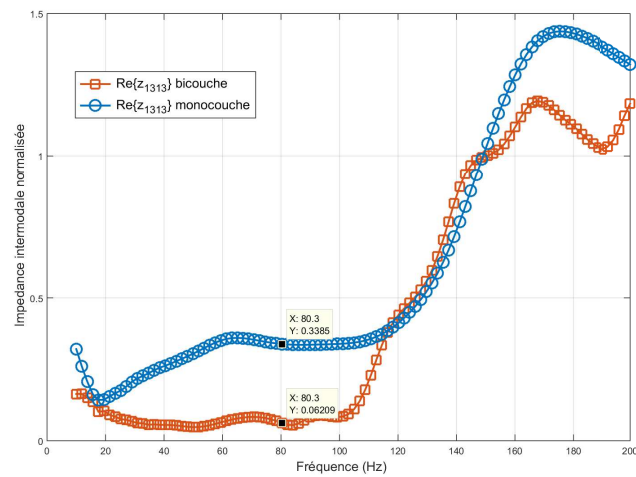


FIGURE 2.37 – Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire du mode (13) dans le cas monocouche et bicouche

Nous allons maintenant nous intéresser à la comparaison théorie-expérience sur une dalle de tramway ainsi qu'une comparaison entre le modèle semi-analytique présenté ici et un modèle numérique.

6 Comparaison théorie-expérience

Nous allons dans un premier temps présenter une comparaison théorie-expérience effectuée sur une dalle de tramway en périphérie de Lyon, France. Dans un second temps, une comparaison avec un modèle numérique, MEFFISTO développée au CSTB sera présentée.

6.1 Expérience du site de "Décines Grand Stade"

Dans cette section, nous allons présenter la comparaison théorie-expérience. Il est cependant nécessaire dans un premier temps de changer les conditions aux limites de la plaque. En effet, le modèle "appuyé" présenté ci-dessous, ne prend pas en compte un mouvement important qui est le mouvement de corps solide. Afin d'inclure ce mouvement dans nos équations, les conditions aux limites de la plaque "appuyées" vont être changées par des conditions aux limites "guidées".

6.1.1 Modélisation d'une plaque en condition aux limites "guidée"

Nous allons présenter ici les modifications à apporter à la modélisation lorsque l'on change les conditions aux limites. La démarche reste la même que celle présentée dans la section 1.1 du chapitre 2. On se focalisera donc seulement sur les changements à apporter.

Les conditions aux limites "guidées" consistent à considérer les efforts tranchants totaux (incluant les moments de torsion) et les rotations nulles sur les bords de la plaque ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} V_x(x, y) = Q_x - \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \\ V_y(x, y) = Q_y - \frac{\partial M_{yx}(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \\ \theta(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \\ \theta(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x = 0, L_x \text{ et } y = 0, L_y \end{cases} \quad (2.76)$$

avec $Q_x = -D(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y})$, $Q_y = -D(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y})$ et $M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu_p)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ les efforts tranchants suivant x, suivant y et le moment de torsion respectivement. Avec ce type de conditions aux limites, la déformée modale est de la forme :

$$\phi_{nm}(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \quad (2.77)$$

pour tout $n \geq 0$ et $m \geq 0$

Seule la transformée de Fourier de la déformée modale change dans la formulation du problème, on obtient donc :

$$\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) = -k_x k_y (L_x L_y)^2 \frac{((-1)^n e^{-jk_x L_x} - 1)}{(n\pi)^2 - (k_x L_x)^2} \frac{((-1)^m e^{-jk_y L_y} - 1)}{(m\pi)^2 - (k_y L_y)^2} \quad (2.78)$$

Finalement en tenant compte des cas particuliers où $n = 0$ et $m = 0$, le problème à résoudre permettant de trouver l'amplitude modale du déplacement de la plaque est :

$$\sum_{nm} (M_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \gamma_{nmpq} = \begin{cases} \frac{S_p^2 \pi^2}{4} a_{pq} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } m \neq 0 \\ \frac{S_p^2 \pi^2}{2} a_{pq} & \text{si } n = 0 \text{ ou } m = 0 \\ S_p^2 \pi^2 a_{pq} & \text{si } n = 0 \text{ et } m = 0 \end{cases} \quad (2.79)$$

Le problème ainsi vient ainsi d'être reformulé pour le cas d'une plaque aux conditions aux limites "guidées" prenant ainsi en compte le mode de corps solide qui apparaît pour $n = m = 0$. Nous utiliserons ce type de solution plus adapté d'un point de vue pratique pour la comparaison théorie-expérience.

6.1.2 Résultats expérimentaux et comparaison

La comparaison théorie-expérience a été effectuée sur le site de Décines Grand Stade où a été installée une extension de la voie de tramway. La dalle de tramway du site en question est une dalle de béton dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont données dans le tableau (2.3).

L_x (m)	L_y (m)	h_p (m)	ρ_p (Kg.m ⁻³)	E_p (Pa)	ν_p	η_p
28	6.6	0.4	2500	$2.5 * 10^{10}$	0.3	0.05

TABLE 2.3 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque de "Decines Grand Stade"

Au vu de l'épaisseur de dalle considérée, on peut se demander si le modèle de plaque mince est encore valide et notamment si des effets de cisaillement dans l'épaisseur de la structure ne peuvent pas apparaître. On estime que le modèle de Kirchhoff pour les plaques minces est valide pour $\frac{\omega}{c_T} h_p < 0.5$ où c_T est la célérité de l'onde de cisaillement dans l'épaisseur de la dalle ce qui donne une fréquence maximum de 390Hz pour l'utilisation de ce modèle.

La figure (2.39) donne une vue d'ensemble de la mesure effectuée sur le site. Le cercle vert représente le point où l'on excite la dalle avec un marteau d'impact. Les coordonnées de ce point sont (14m; 4.95m). Les cercles rouges représentent les accéléromètres positionnés sur la dalle et à la surface du sol. Le capteur 1 est situé à 0.1m du bord de la dalle dans l'alignement de l'effort. Les capteurs 2, 3, 4 et 5 sont situés à 2m, 4m, 8m et 16m respectivement du bord de la dalle dans l'alignement de l'effort. Les figures (2.38) sont des photos correspondants aux positionnements des capteurs sur site.

Désignation	Marteau	Capt. 1	Capt. 2	Capt. 3	Capt. 4	Capt. 5
Marque	Kistler	PCB	PCB	PCB	PCB	PCB
Sensibilité (V/g)	0.000213	1.018	1.034	9.89	10.62	9.1

TABLE 2.4 – Caractéristiques des capteurs utilisés au cours de la mesure

Une caractérisation du sol par la méthode *Spectral Analysis of Surface Waves* (SASW) a été effectuée [Wathelet(2005), Strobbia()]. Cette méthode permet d'obtenir la donnée de la célérité de cisaillement, de dilatation, la masse volumique et



FIGURE 2.38 – Photos de l'expérience de décroissance avec impact sur dalle de "Décines Grand Stade"

la hauteur des couches par une méthode inverse. Le tableau (2.5) résume les caractéristiques mécaniques et géométriques du sol obtenues pour ce site. On trace également sur la figure (2.40) le profil du sol en termes d'onde de cisaillement, de dilatation et d'amortissement afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble du type de sol en question.

Sol	C_s	C_p	η_p	η_s	ρ	Épaisseur
Couche 1	300	1000	0.03	0.03	1500	5
Couche 2	900	2000	0.03	0.03	1500	∞

TABLE 2.5 – Caractéristiques mécaniques et géométrique du site de "Decines Grand Stade"

10 impacts ont été réalisés sur la dalle afin de s'assurer de la répétabilité de la mesure. L'effort injecté est constant avec la fréquence et vaut $147dB - ref \ 1.10^{-6}N$ correspondant à un pic d'effort de environ 14 000N. On donne sur la figure (2.41) la fonction de cohérence entre les différents capteurs d'accélération et l'effort injecté sur la dalle. On observe une bonne cohérence de la mesure pour le capteur sur la dalle sur toute la plage de fréquence [10Hz;100Hz]. En ce qui concerne la mesure à la surface du sol, la cohérence est moins bonne à basse fréquence car il est plus difficile d'exciter de grandes longueurs d'onde aux vus des efforts injectés et de la taille de l'impact. Globalement la mesure de cohérence montre que la mesure est acceptable dès 20Hz.

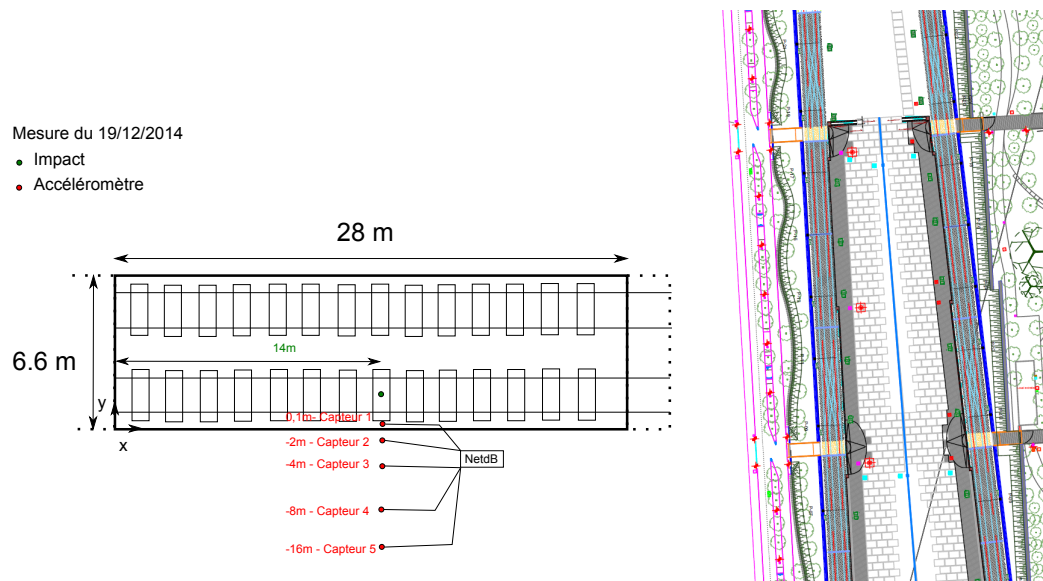


FIGURE 2.39 – Vue d'ensemble de du site de "Décines Grand Stade" (droite) et plan de mesure (gauche)

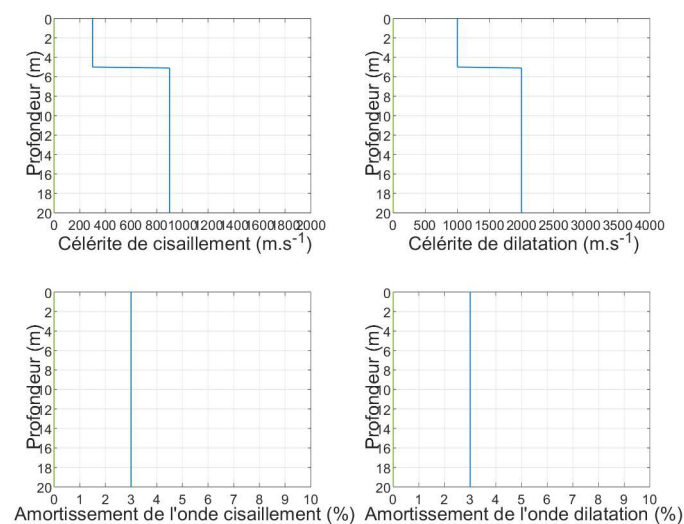


FIGURE 2.40 – Profil du sol de "Decines Grand Stade"

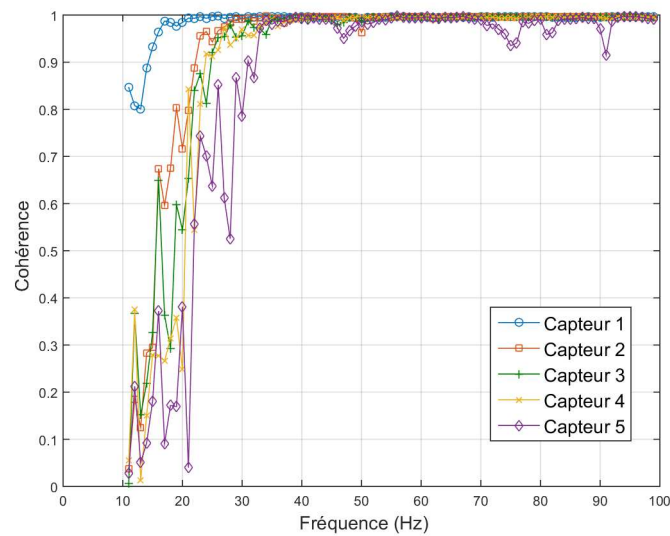


FIGURE 2.41 – Fonction de cohérence entre les mesures accélérométrique et l'effort injecté

Les figures (2.42), (2.43), (2.44), (2.45) et (2.46) correspondent aux comparaisons théorie-expérience en bande fine.

En ce qui concerne la mesure sur dalle, la correspondance est bonne avec un écart entre les modèles, en bande fine, de 0.7dB en moyenne. La comparaison théorie-expérience sur la structure couplée au sol n'avait jusqu'à présent pas été vérifiée à la connaissance de l'auteur et permet de confirmer que le modèle de plaque mince utilisé est acceptable pour modéliser une dalle de tramway.

En ce qui concerne les mesures à la surface du sol, les écarts moyens sur les niveaux vibratoires en bande fine sont de 2.2dB, 3.5dB, 0.2dB et 1.5dB pour les distances 2m, 4m, 8m et 16m respectivement. Ces écarts sont relativement faibles au regard des incertitudes mécaniques et géométriques concernant la dalle et surtout le sol. Cela met notamment en avant que ce modèle de dalle couplée au sol est pertinent dans la plage de fréquence [10Hz ; 100Hz] qui correspond généralement à la plage d'intérêt des études vibratoires en ferroviaire.

Dans cette section, la comparaison théorie-expérience a montré que le modèle analytique de couplage sol-plaque est adapté pour des applications ferroviaires. Une comparaison avec un modèle numérique va permettre de confirmer son domaine de validité.

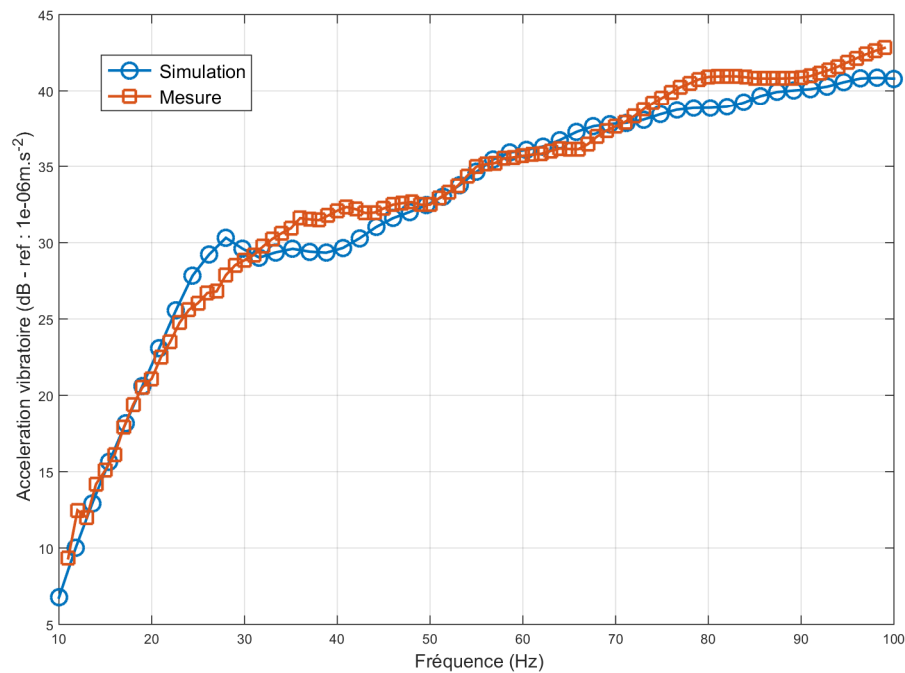


FIGURE 2.42 – Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine sur la dalle de tramway

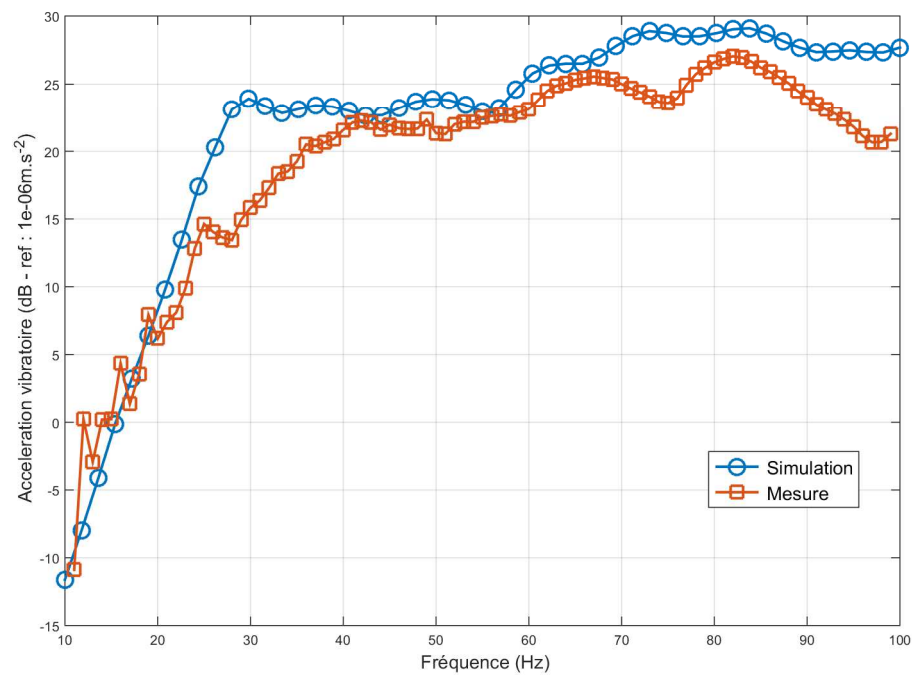


FIGURE 2.43 – Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 2m de la dalle de tramway

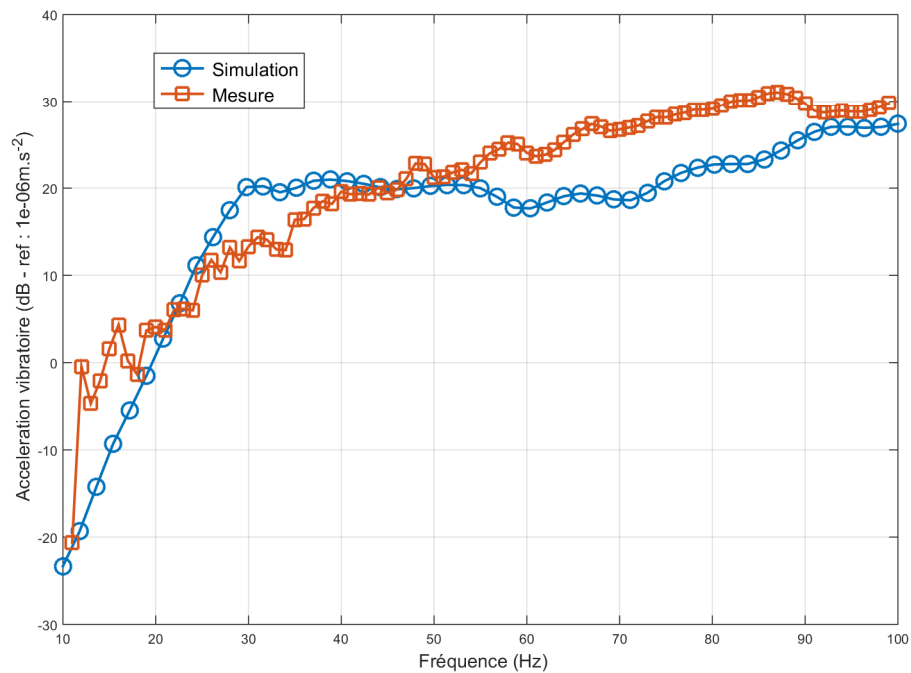


FIGURE 2.44 – Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 4m de la dalle de tramway

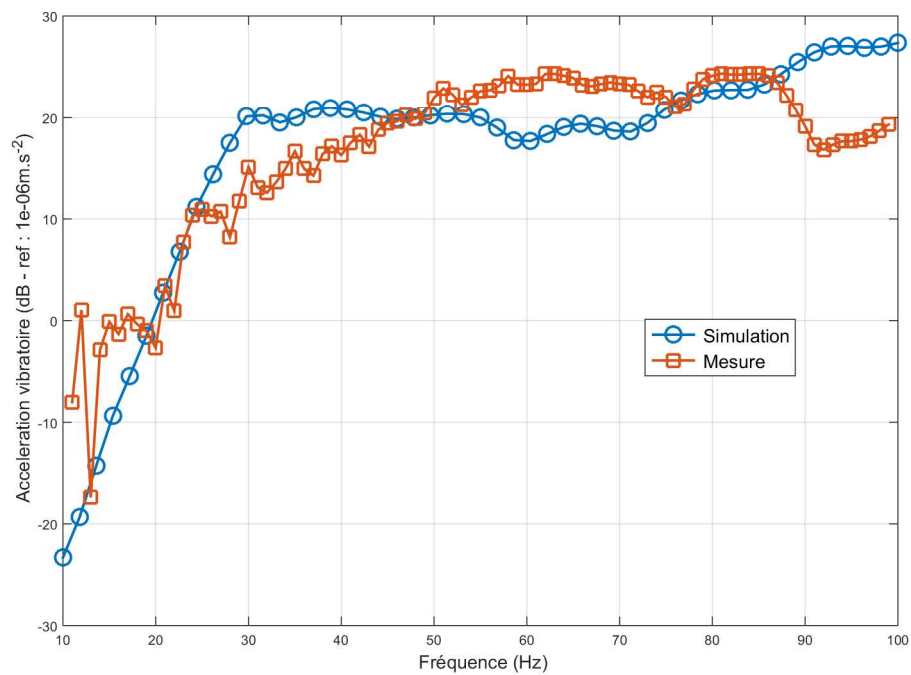


FIGURE 2.45 – Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 8m de la dalle de tramway

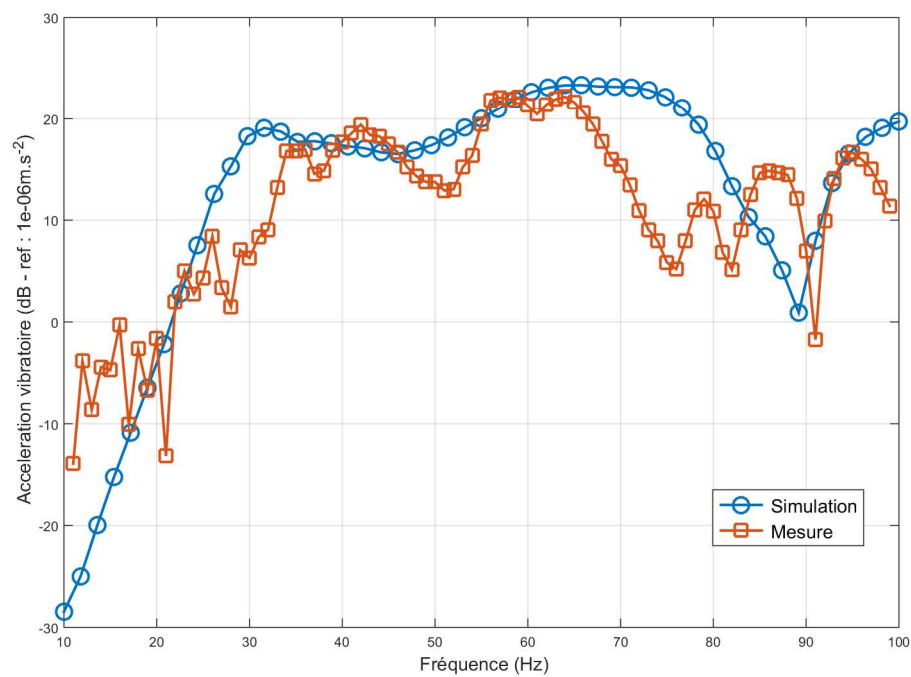


FIGURE 2.46 – Comparaison du niveau d'accélération vibratoire expérimentale et simulé en bande fine à 16m de la dalle de tramway

6.2 Comparaison modèle semi-analytique et modèle numérique MEFFISTO

Dans cette section, on s'intéresse à comparer le code de calcul MEFFISTO développé au sein du CTSB par P. Jean [Jean(2015)] avec le modèle semi-analytique présenté dans cette thèse. Le modèle semi-analytique a été nommé SIRPOVIB.

La figure (2.47) donne une vue d'ensemble du problème que l'on considère ici pour comparer les deux modèles. Il s'agit d'une plaque en béton ($\rho_p = 2400 \text{ Kg.m}^{-3}$, $E_p = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\nu_p = 0.15$, $\eta_p = 0.01$) de largeur 1 m de longueur 8 m et d'épaisseur 0.4 m . La structure est excitée en son centre par un effort ponctuel d'amplitude 1 N .

Le sol est un sol monocouche dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes et sont données dans le tableau (2.6).

Sol	C_s	C_p	η_p	η_s	ρ	Epaisseur
Couche 2	262	460	0.1	0.1	1550	∞

TABLE 2.6 – Caractéristiques mécaniques et géométrique du sol pour la comparaison du code MEFFISTO et SIRPOVIB

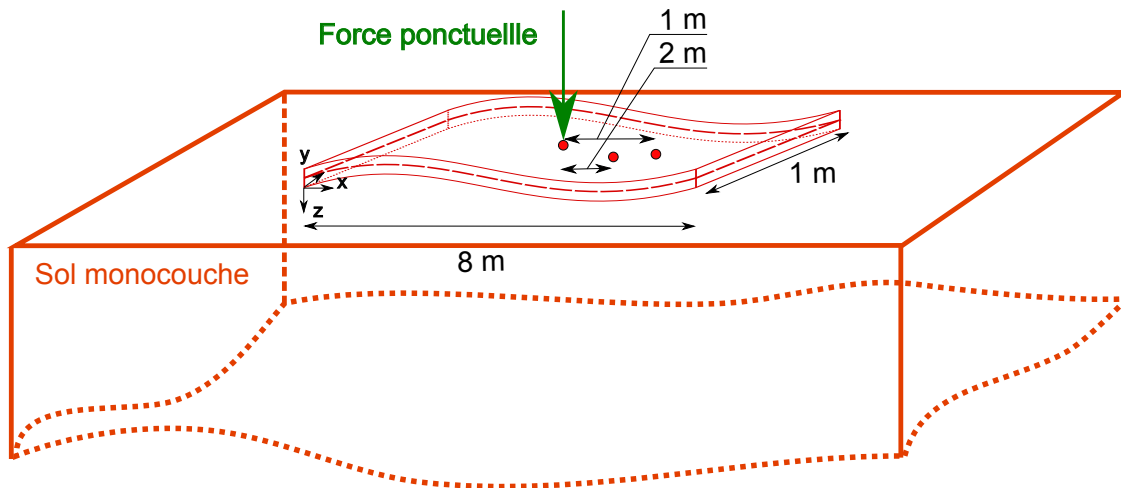


FIGURE 2.47 – Vue d'ensemble du problème considéré pour la comparaison du code de calcul MEFFISTO et du code de calcul SIRPOVIB

Dans le code de calcul MEFFISTO, la structure et le sol sont modélisés en utilisant les éléments de frontière (BEM) en 3D. On s'intéresse à la réponse vibratoire en trois points de la structure à savoir la réponse au point d'excitation, $(0.5 \text{ m}; 4 \text{ m})$, à 1 m du point d'excitation, $(0.5 \text{ m}; 5 \text{ m})$ et à 2 m du point d'excitation, $(0.5 \text{ m}; 6 \text{ m})$.

Les figures (2.48), (2.49) et (2.50) correspondent aux comparaisons entre les deux modèles aux points d'excitation, à 1 m du point d'excitation et à 2 m du point d'excitation respectivement. On observe une correspondance parfaite entre les deux modèles jusqu'à 100 Hz . A partir de 100 Hz , on observe un écart entre les deux modèles en s'éloignant du point d'excitation cependant cet écart reste relativement faible car il est inférieur à 5 dB . Ces écarts sont logiques car on rappelle que les conditions aux limites utilisées dans le modèle SIRPOVIB sont des conditions aux

limites "guidées" imposant des rotations nulles sur les bords. MEFISSTO est un logiciel BEM-FEM dans lequel la structure est souvent modélisée en FEM. De plus au delà de 100Hz, on sait que le modèle de Kirchhoff pour les plaques en vibrations de flexion commence à montrer quelques limites.

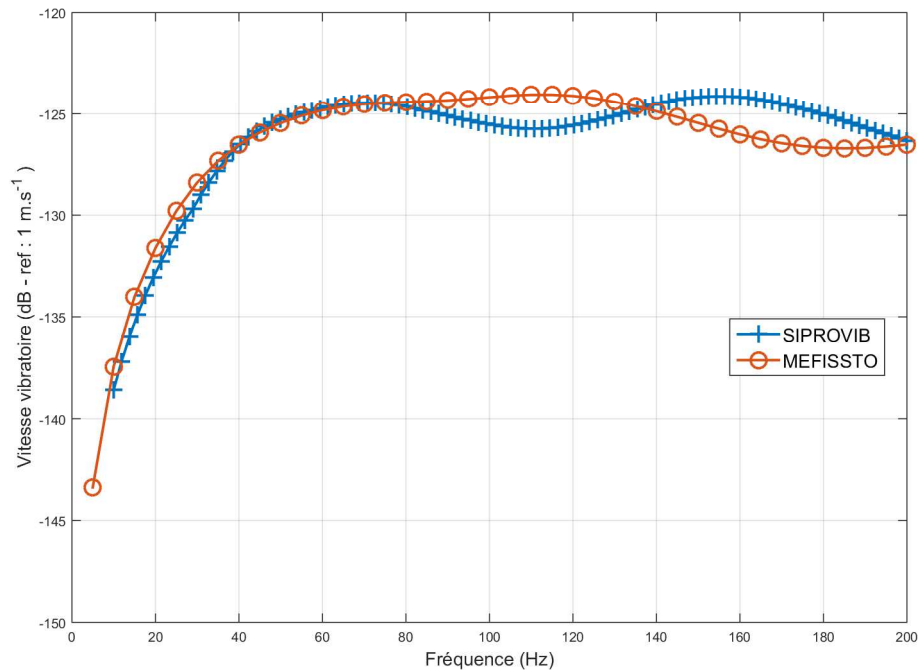


FIGURE 2.48 – Comparaison de la fonction de transfert au point d'excitation entre le code de calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB

On retiendra tout de même que la plage fréquentielle qui nous intéresse généralement se situe entre 10Hz et 100Hz et donc que sur cette plage de fréquence la correspondance est très bonne. Ceci permet de valider l'utilisation des équations de vibration de flexion de type Kirchhoff pour modéliser les dalles de tramway.

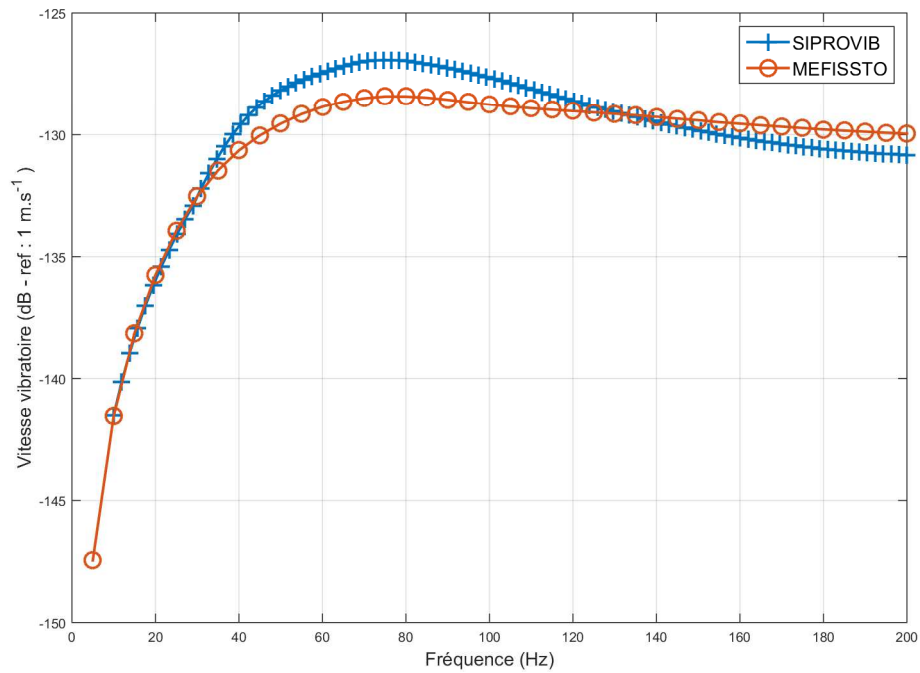


FIGURE 2.49 – Comparaison de la fonction de transfert à 1m du point d'excitation entre le code de calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB

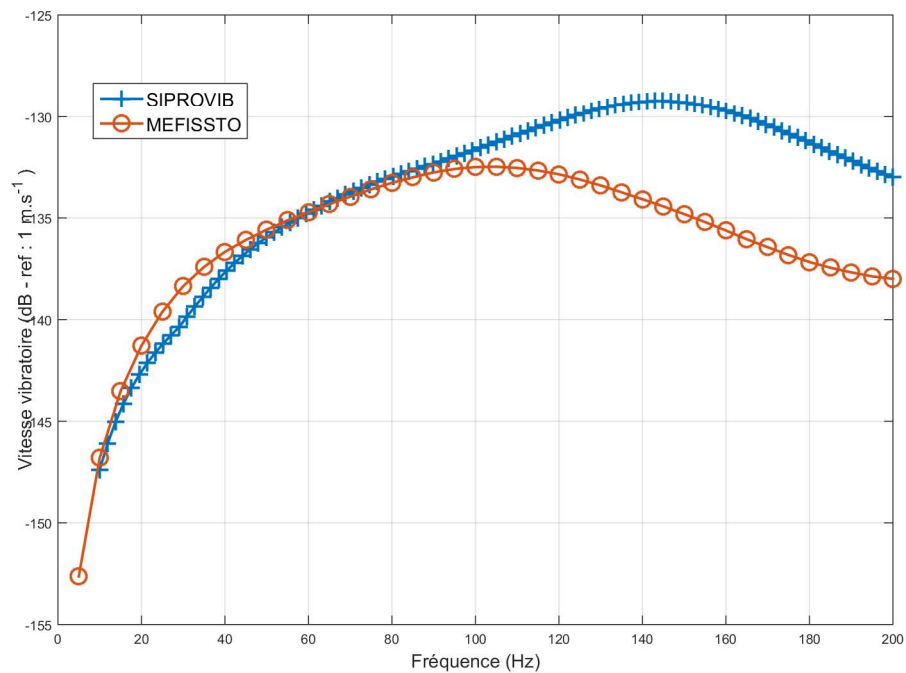


FIGURE 2.50 – Comparaison de la fonction de transfert à 2m du point d'excitation entre le calcul MEFISSTO et du code de calcul SIPROVIB

7 Conclusion

Dans ce second chapitre nous avons formulé le modèle semi-analytique du couplage d'une plaque de dimension finie en vibration de flexion avec un sol stratifié. Il a été ainsi possible, grâce à des similarités avec le couplage fluide, de mettre en évidence les phénomènes de raideur, masse et amortissement modal ajouté. Ceci permet notamment de donner une explication des phénomènes en jeu d'un point de vue pédagogique. Les similarités et les différences entre le couplage fluide et le couplage élastique ont permis d'expliquer l'origine de la forte atténuation des pics de résonance lorsqu'une structure est couplée au sol. Finalement une comparaison théorie-expérience a permis de valider le modèle construit pour des applications ferroviaires notamment.

Une extension de ce modèle va maintenant être présentée qui consiste à modéliser plusieurs plaques couplées au sol. Cette extension a notamment l'objectif de modéliser la dalle de tramway, les fondations d'un bâtiment et une dalle entre les deux afin d'atténuer les vibrations.

Chapitre 3

Modélisation d'une Barrière Vibratoire Horizontale (BVH)

Dans ce chapitre, nous allons présenter la modélisation semi-analytique de plusieurs plaques couplées au sol. Cette modélisation utilise les mêmes approches que celles présentées dans le précédent chapitre. Il s'agit notamment, à travers ce modèle, de comprendre les transferts vibratoires entre deux structures couplées à la surface du sol. Une nouvelle catégorie de barrière vibratoire, nommée **Barrière Vibratoire Horizontale**, va être présentée et étudiée. Des applications du couplage de plusieurs plaques à la surface du sol vont également être présentées.

1 Généralisation du couplage d'une plaque avec le sol au cas de deux plaques

Dans cette première section, la formulation théorique de deux plaques couplées au sol va être présentée. Cette généralisation du couplage à deux plaques utilisant des formulations semi-analytiques est nouvelle, autant dans des cas de couplage élastique que dans des cas de couplage fluide. D'un point de vue acoustique, de telle modélisation ne présentent pas un grand intérêt, en revanche pour des applications de couplage avec le sol, elles sont quasiment indispensables dans la mesure où l'on s'intéresse régulièrement à l'interaction de plusieurs structures couplées entre elles avec le sol.

Le modèle de deux plaques en vibration de flexion couplées au sol est présenté ici. On mettra notamment en évidence que l'écriture du problème est très proche de celle présentée dans le chapitre précédent.

1.1 Les équations du mouvement de deux plaques couplées au sol

Les figures (3.1) et (3.2) donnent une vue d'ensemble du problème que l'on cherche à modéliser. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les conditions aux limites de plaque "guidées" sont les plus adaptées pour une bonne représentation du niveau vibratoire à la surface et dans le sol dans la mesure où elles prennent en compte le mouvement de corps solide. Nous adopterons donc dans cette modélisation ce type de conditions aux limites.

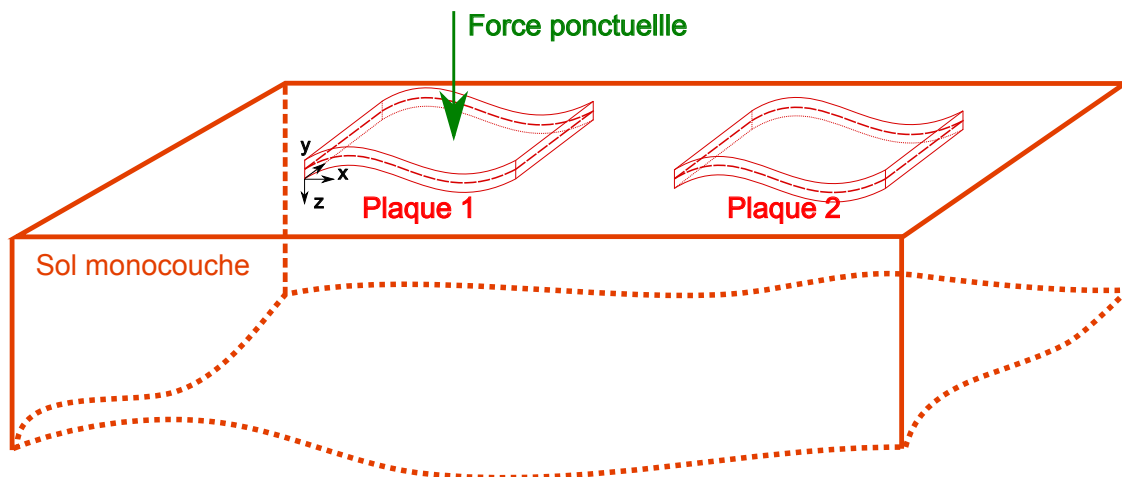


FIGURE 3.1 – Représentation du couplage de deux plaques avec le sol monocouche semi-infini

Les deux plaques que l'on étudie ici sont couplées au sol sur toute leur surface. Ces plaques sont en vibration de flexion sous les hypothèses de Kirchhoff c'est-à-dire que l'on néglige le cisaillement et l'inertie rotationnelle. Nous avons vu que ces hypothèses représentent une bonne approximation du mouvement de la plaque sur la plage fréquentielle d'intérêt. L'une des plaques sera indiquée (1) comme au premier

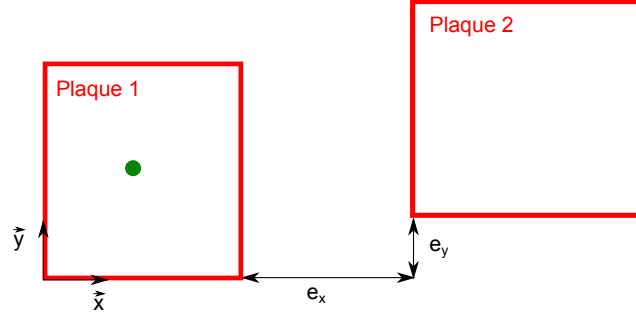


FIGURE 3.2 – Vue de dessus du couplage de deux plaques avec le sol monocouche semi-infini

chapitre et l'autre plaque sera indicée (2). La plaque (1) est excitée par un effort ponctuel de type Dirac d'amplitude F_0 à la position (x_0, y_0) . La plaque (2) n'est pas excitée et se trouve couplée au sol sur un côté de sa surface.

Dans le domaine fréquentiel, les équations du mouvement des deux plaques sont données par les équations (3.1).

$$\begin{cases} D_{p1}^* \nabla^4 w_1(x, y) - \rho_{p1} h_{p1} \omega^2 w_1(x, y) = F(x, y) + \sigma_{p1}(x, y) & \forall (x, y) \in S_{p1} \\ D_{p2}^* \nabla^4 w_2(x, y) - \rho_{p2} h_{p2} \omega^2 w_2(x, y) = \sigma_{p2}(x, y) & \forall (x, y) \in S_{p2} \end{cases} \quad (3.1)$$

où l'opérateur $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ correspond à l'opérateur bilaplacien et $D_{p1}^* = D_{p1}(1+j\eta_{p1})$ et $D_{p2}^* = D_{p2}(1+j\eta_{p2})$ correspondent aux rigidités de flexion complexes des plaques (1) et (2) respectivement. $\sigma_{p1}(x, y)$ et $\sigma_{p2}(x, y)$ sont les contraintes appliquées sur toute la surface de la plaque 1 et 2 par le sol respectivement. Le couplage s'effectue suivant la normale à la plaque c'est à dire suivant la direction \vec{z} . L'inconnue de ce problème est le déplacement transverse des deux plaques à savoir $w_1(x, y)$ pour la plaque (1) et $w_2(x, y)$ pour la plaque (2).

Une décomposition modale sur les déplacements de la plaque (1) et (2) est effectuée ainsi que sur l'effort afin d'obtenir une solution au problème (3.1). On pose donc :

$$\begin{cases} w_1(x, y) = \sum_{nm} a_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) & \forall (x, y) \in S_1 \\ F(x, y) = \sum_{nm} F_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) & \forall (x, y) \in S_1 \\ w_2(x, y) = \sum_{pq} b_{pq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) & \forall (x, y) \in S_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $a_{nm}(\omega)$ et $b_{pq}(\omega)$ sont les amplitudes modales des plaques (1) et (2) respectivement, $\phi_{nm}(x, y)$ et $\phi_{pq}(x, y)$ sont les déplacements modaux des plaques (1) et (2). Les indices n et m font référence aux modes de la plaque (1) suivant les directions x et y respectivement tandis que les indices p et q font référence aux modes de la plaque (2) suivant la direction x et y respectivement.

Les conditions aux limites guidées seront prises en compte dans cette étude et consistent à considérer les rotations et les efforts nuls sur les bords de la plaque. Sous ces conditions aux limites, le déplacement modal de la plaque (1) et (2) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_{nm}(x, y) = \cos(\frac{n\pi}{L_{x1}}x)\cos(\frac{m\pi}{L_{y1}}y) & \forall (x, y) \in S_1 \\ \phi_{pq}(x, y) = \cos(\frac{p\pi}{L_{x2}}(x - L_{x1} - e_x))\cos(\frac{q\pi}{L_{y2}}(y - e_y)) & \forall (x, y) \in S_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $n \geq 0$, $m \geq 0$, $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

La décomposition modale de l'effort est nécessaire pour des questions de régularisation du problème. L'amplitude modale de l'effort pour une plaque guidée s'écrit donc :

$$F_{nm} = \begin{cases} \frac{4F_0}{S_{p1}}\phi_{nm}(x_0, y_0) & \text{si } (n, m) \neq (0, 0) \\ \frac{2F_0}{S_{p1}}\phi_{nm}(x_0, y_0) & \text{si } n = 0 \text{ ou } m = 0 \\ \frac{F_0}{S_{p1}}\phi_{nm}(x_0, y_0) & \text{si } (n, m) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la modélisation du sol.

1.2 Modélisation du sol

Le sol est supposé continu, homogène et isotrope ce qui permet de le modéliser grace aux équations de Navier en déplacement. En régime harmonique et pour un sol monocouche semi-infini, on a :

$$\mu \nabla^2 \vec{u}(x, y, z) + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}(x, y, z)) + \rho \omega^2 \vec{u}(x, y, z) = \vec{0} \quad (3.5)$$

avec $\vec{u}^T(x, y, z) = \{u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\}$ le vecteur déplacement du sol.

L'obtention d'une expression du déplacement de plaque a déjà été présentée dans le chapitre précédent. On se limitera ici à présenter l'expression des conditions aux limites différentes de celle considérée précédemment.

Les conditions aux limites portent toujours sur la surface du sol à savoir $z = 0$. Les contraintes tangentielles par rapport à la normale z sont nulles. Les contraintes normales à l'axe z sont nulles à l'exception de la surface S_1 et S_2 étant donné que les plaques (1) et (2) sont couplées au sol. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x, y, z = 0) = 0 & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \sigma_{yz}(x, y, z = 0) = 0 & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \sigma_{zz}(x, y, z = 0) = \begin{cases} \sigma_{p1}(x, y) & \forall (x, y) \in S_{p1} \\ \sigma_{p2}(x, y) & \forall (x, y) \in S_{p2} \\ 0 & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{S_1 \cup S_{p2}\} \end{cases} \end{cases} \quad (3.6)$$

où σ_{xz} et σ_{yz} représentent la contrainte tangentielle suivant l'axe \vec{z} et σ_{zz} représente la contrainte normale suivant l'axe \vec{z} . σ_{p1} et σ_{p2} représentent les contraintes appliquées sur les plaques par le sol.

Il est également important de considérer les conditions de continuité des déplacements entre le sol et les plaques à savoir :

$$\begin{cases} w_1(x, y) = u_z(x, y, 0) & \forall (x, y) \in S_{p1} \\ w_2(x, y) = u_z(x, y, 0) & \forall (x, y) \in S_{p2} \end{cases} \quad (3.7)$$

1.3 Conditions aux limites de sol dans le domaine de Fourier

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était nécessaire d'exprimer les contraintes à la surface du sol dans le domaine de Fourier. Les contraintes tangentielles à l'axe z étant nulles dans le domaine spatial, elles restent nulles dans le domaine de Fourier. En revanche, la contrainte normale à l'axe nécessite de considérer les deux surfaces de couplage S_{p1} et S_{p2} .

On rappelle tout d'abord que la contrainte dans le domaine de Fourier est définie par :

$$\tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{zz}(x, y, 0) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.8)$$

La contrainte normale est nulle partout sauf sous la plaque 1 et la plaque 2 donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}(k_x, k_y, 0) &= \int_0^{L_{x1}} \int_0^{L_{y1}} \sigma_{p1}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &+ \int_{L_{x1}+e_x}^{L_{x1}+e_x+L_{x2}} \int_{e_y}^{e_y+L_{y2}} \sigma_{p2}(x, y, 0) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \tilde{\sigma}_1(k_x, k_y) + \tilde{\sigma}_2(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\tilde{\sigma}_1(k_x, k_y)$ représente la contrainte appliquée sur la plaque 1 par la sol et $\tilde{\sigma}_2(k_x, k_y)$ représente la contrainte appliquée sur la plaque 2 par la sol dans le domaine de Fourier.

Il est désormais possible de donner l'expression des inconnues A , B , C et D des potentiels dans l'expression (2.20) grâce aux conditions aux limites (3.9). Dans le cas d'un sol homogène monocouche semi-infini, il a été vu qu'une expression analytique était possible entre le déplacement du sol et la contrainte à la surface (2.26). On obtient dans le cas présent la formule suivante :

$$\tilde{u}_z(k_x, k_y, 0) = N(k_x, k_y) \tilde{\sigma}_1(k_x, k_y) + N(k_x, k_y) \tilde{\sigma}_2(k_x, k_y) \quad (3.10)$$

$$\text{où } N(k_x, k_y) = \frac{j k_1 k_s^2}{4 \mu k_1 k_2 (k_x^2 + k_y^2) - (\lambda k_d^2 + 2 \mu k_1^2) (k_x^2 + k_y^2 - k_2^2)}.$$

1.4 Expression des contraintes appliquées par le sol sur les plaques dans le domaine de Fourier

Dans le domaine spatial, l'expression de la contrainte appliquée par le sol sur chaque plaque est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{p1}(x, y) = \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \phi_{nm}(x, y) & \forall (x, y) \in S_1 \\ \sigma_{p2}(x, y) = \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) & \forall (x, y) \in S_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

où $Z_{nm}(\omega) = D_{p1}^* ((\frac{n\pi}{L_{x1}})^2 + (\frac{m\pi}{L_{y1}})^2)^2 - \rho_{p1} h_{p1} \omega^2$ et $Z_{pq}(\omega) = D_{p2}^* ((\frac{p\pi}{L_{x2}})^2 + (\frac{q\pi}{L_{y2}})^2)^2 - \rho_{p2} h_{p2} \omega^2$ correspondent aux impédances mécaniques d'un mode de plaque (n, m) et (p, q) .

On calcule $\tilde{\sigma}_1(k_x, k_y)$ et $\tilde{\sigma}_2(k_x, k_y)$ telles que définies dans l'expression (3.9) et on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_1(k_x, k_y) = \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) & \forall (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2 \\ \tilde{\sigma}_2(k_x, k_y) = \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) \tilde{\Phi}_{pq}(k_x, k_y) & \forall (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Il faut dans ce problème faire bien attention aux calculs de la transformée de Fourier de l'amplitude modale notamment pour la deuxième plaque. L'intégration de l'amplitude modale $\phi_{pq}(x, y)$ porte sur la surface S_2 ce qui s'écrit :

$$\tilde{\Phi}_{pq}(k_x, k_y) = \int_{L_{x1}+e_x}^{L_{x1}+e_x+L_{x2}} \int_{e_y}^{e_y+L_{y2}} \cos\left(\frac{p\pi}{L_{x2}}(x-L_{x1}-e_x)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_{y2}}(y-e_y)\right) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.13)$$

On effectue le changement de variable suivant $X = x - L_{x1} - e_x$ et $Y = y - e_y$ pour finalement obtenir :

$$\tilde{\Phi}_{pq}(k_x, k_y) = e^{-j(k_x(L_{x1}+e_x)+k_y e_y)} \int_0^{L_{x2}} \int_0^{L_{y2}} \cos\left(\frac{p\pi}{L_{x2}}X\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_{y2}}Y\right) dX dY \quad (3.14)$$

$$\tilde{\Phi}_{pq}(k_x, k_y) = e^{-j(k_x(L_{x1}+e_x)+k_y e_y)} \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) \quad (3.15)$$

Ainsi lorsque l'on couple une deuxième plaque avec le sol, il faudra bien considérer l'ajout du terme $e^{-j(k_x(L_{x1}+e_x)+k_y e_y)}$.

Il est maintenant possible d'obtenir l'expression de l'amplitude modale de la plaque 1 et 2 à travers la continuité des déplacements des plaques avec le sol.

1.5 Détermination des amplitudes modales des deux plaques

En utilisant la relation (3.10) avec l'expression des contraintes appliquées sur la plaque 1 et 2 dans le domaine de Fourier (3.12), il est possible de donner l'expression du déplacement du sol à la surface :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z(k_x, k_y, 0) &= N(k_x, k_y) \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \\ &+ N(k_x, k_y) \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) e^{-j(k_x(L_{x1}+e_x)+k_y e_y)} \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A ce stade de la résolution, il est évident que l'inconnue du problème est l'amplitude modale de la plaque 1 et 2 : $a_{nm}(\omega)$ et $b_{pq}(\omega)$. En considérant la continuité des déplacements (3.7), on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{nm} a_{nm}(\omega) \phi_{nm}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(k_x, k_y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y & \forall (x, y) \in S_{p1} \\ \sum_{pq} b_{pq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(k_x, k_y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y & \forall (x, y) \in S_{p2} \end{cases} \quad (3.17)$$

On effectue ici un processus d'orthogonalisation sur le déplacement des deux plaques. On multiplie la première équation par $\phi_{rs} = \cos(\frac{r\pi}{L_{x1}}x) \cos(\frac{s\pi}{L_{y1}}y)$ puis on intègre sur S_{p1} . De même, on multiplie la deuxième équation par $\phi_{tu} = \cos(\frac{t\pi}{L_{x2}}x) \cos(\frac{u\pi}{L_{y2}}y)$ puis on intègre sur S_{p2} . Les indices (r, s) font référence à la plaque 1 tandis que les indices (t, u) font référence à la plaque 2. Finalement, on obtient le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \gamma_{nmrs}^{11} + \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) \gamma_{pqrs}^{12} = S_{rs} a_{rs} \\ \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) \gamma_{nm tu}^{21} + \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) \gamma_{pq tu}^{22} = S_{tu} a_{tu} \end{cases} \quad (3.18)$$

avec

$$\gamma_{nmrs}^{11} = \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (3.19)$$

$$\gamma_{pqrs}^{12} = \gamma_{nm tu}^{21} = \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) e^{-jk_x(a+e_x) - jk_y e_y} \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (3.20)$$

$$\gamma_{pq tu}^{22} = \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{tu}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (3.21)$$

Il faut également distinguer les normes suivantes :

$$\begin{aligned} S_{rs} &= \pi^2 S_{p1}^2 \text{ si } (r, s) = (0, 0) & S_{tu} &= \pi^2 S_{p2}^2 \text{ si } (t, u) = (0, 0) \\ S_{rs} &= \frac{\pi^2 S_{p1}^2}{2} \text{ si } r = 0 \text{ ou } s = 0 & S_{tu} &= \frac{\pi^2 S_{p2}^2}{2} \text{ si } t = 0 \text{ ou } u = 0 \\ S_{rs} &= \frac{\pi^2 S_{p1}^2}{4} \text{ si } (r, s) \neq (0, 0) & S_{tu} &= \frac{\pi^2 S_{p2}^2}{4} \text{ si } (t, u) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le terme γ_{nmrs} correspond à la mobilité intermodale des modes de la plaque 1 sur les modes de la plaque 1. Il traduit le couplage modale de la plaque 1 avec le sol. Il en est de même pour le terme $\gamma_{pq tu}$ qui correspond à la mobilité intermodale de modes de la plaque 2 sur ses propres modes.

En revanche, les termes γ_{pqrs} et $\gamma_{nm tu}$ sont nouveaux dans cette formulation. Ils correspondent à la mobilité intermodale des modes d'une plaque sur les modes de l'autre plaque. Ainsi les modes des deux plaques couplées au sol sont couplés entre eux à travers le milieu propagatif qui est, ici, le sol. On remarque également qu'il y a égalité entre les termes γ_{pqrs} et $\gamma_{nm tu}$ ce qui provient du fait que l'action d'un mode de plaque 1 sur un mode de plaque 2 est égale à l'action d'un mode de plaque 2 sur un mode de plaque 1. Cette propriété est liée au principe de réciprocité des équations de plaque et de sol utilisées.

Le système linéaire ((3.18)) peut se mettre sous forme matricielle suivante plus aisée à lire :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{nmrs}^{11} & \gamma_{pqrs}^{12} \\ \gamma_{nm tu}^{21} & \gamma_{pq tu}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{nm}(\omega) & (0) \\ (0) & Z_{pq}(\omega) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{nm}(\omega) \\ b_{pq}(\omega) \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} S_{mn} & (0) \\ (0) & S_{pq} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{nm}(\omega) \\ b_{pq}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{nmrs}^{11} & \gamma_{pqrs}^{12} \\ \gamma_{nm tu}^{21} & \gamma_{pq tu}^{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_{mn} \\ (0) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Le calcul des intégrales indéfinies (3.19), (3.20) et (3.21) doit être effectué avec précaution. Le domaine doit être suffisamment discrétisé en nombre d'onde afin d'assurer une bonne convergence. La troncature du domaine infini doit aussi être suffisamment grande. On donne en annexe des critères afin que le calcul de l'intégrale indéfinie converge correctement.

1.6 L'impédance intermodale de couplage vibratoire de deux plaques couplées au sol

De la même façon que dans le chapitre 1, on définit l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} Z_{nmrs}^{11} & Z_{pqrs}^{12} \\ Z_{nmtu}^{21} & Z_{pqtu}^{22} \end{pmatrix} = \frac{j}{\omega} \begin{pmatrix} S_{mn} & (0) \\ (0) & S_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{mnrs}^{11} & \gamma_{pqrs}^{12} \\ \gamma_{nmtu}^{21} & \gamma_{pqtu}^{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.24)$$

La résolution du système linéaire se ramène donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} Z_{nm}(\omega) & (0) \\ (0) & Z_{pq}(\omega) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{nm}(\omega) \\ b_{pq}(\omega) \end{Bmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} Z_{nmrs}^{11} & Z_{pqrs}^{12} \\ Z_{nmtu}^{21} & Z_{pqtu}^{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{nm}(\omega) \\ b_{pq}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{mn} \\ (0) \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Cette formulation présente l'intérêt d'avoir accès à la donnée de l'énergie injectée dans le sol ainsi que celle transférée entre les plaques à travers le sol.

On note une très forte similarité avec le problème d'une plaque couplée au sol. La formulation pour plusieurs plaques ne présente ainsi pas une grosse difficulté de formulation mais permet la prise en compte de nombreux cas d'interaction plaque-sol, indispensable à la compréhension des phénomènes de couplage dans le domaine ferroviaire.

Pour finir cette formulation, nous allons exprimer le déplacement du sol à la surface.

1.7 Expression du déplacement vibratoire du sol

A partir de la détermination des amplitudes modales de la plaque (1) et (2), il est possible de donner l'expression du déplacement vibratoire à la surface du sol. En effectuant une transformée 2D spatiale inverse de l'expression (3.16), on obtient :

$$u_z(x, y, 0) = \sum_{nm} (Z_{nm}(\omega) a_{nm}(\omega) - F_{nm}) T_{nm}(x, y) + \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) T_{pq}(x, y) \quad (3.26)$$

avec $T_{nm}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$ et

$T_{pq}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} N(k_x, k_y) e^{-jk_x(L_{x1}+e_x) - jk_y e_y} \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$

Dans cette section, nous avons formulé le problème de couplage de deux plaques avec le sol.

Ce modèle permet notamment de comprendre l'interaction entre deux structures couplées à un milieu élastique.

2 Résultats Numériques

Dans cette section, nous allons étudier quelques résultats numériques. Nous focaliserons notamment notre étude sur la modélisation d'une **Barrière Vibratoire Horizontale** qui constitue une façon d'atténuer les vibrations se propageant à la surface du sol. [Celebi et al.(2009)Celebi, Firat, Beyhan, Cankaya, Vural, and Kirtel,Francois et al.(2012)Francois, Schevenels, Thyssen, Borgions, and Degrande,Grau and Laulagnet(2015b)] Nous évaluerons également les contraintes que peuvent recevoir un bâtiment à proximité d'une voie de tramway. [Coquel(2008)]

2.1 Représentation du couplage intermodal des modes de plaques différentes

Dans cette section, nous présentons les impédances intermodale de rayonnement vibratoire lorsque celles-ci sont couplées au sol. L'intérêt est de montrer la perturbation des impédances dues à la présence de la deuxième plaque.

Nous considérons un sol monocouche dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : $c_s = 250m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. Les plaques couplées au sol ont une longueur et une largeur de $L_{x1} = 6m$, $L_{y1} = 6m$, $L_{x2} = 4m$ et $L_{y2} = 6m$. On rappelle que les impédances intermodales de rayonnement vibratoire ne dépendent que de la surface de contact entre le sol et les plaques c'est pourquoi nous n'avons pas besoin ici d'informations supplémentaires sur les plaques.

La figure (3.3) représente la partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la plaque 1 pour le mode (0,0) dans le cas d'un couplage avec une plaque et dans le cas de couplage avec deux plaques. On observe une très faible perturbation de l'impédance due à la présence de la deuxième plaque principalement à basse fréquence.

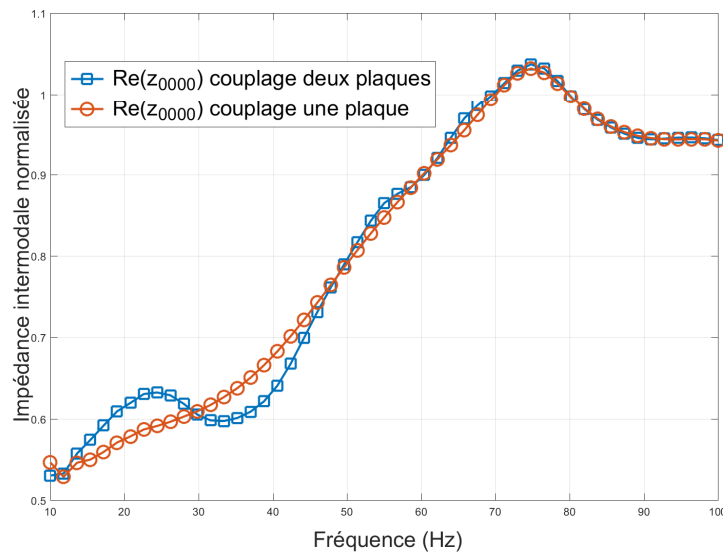


FIGURE 3.3 – Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la plaque 1 dans le cas d'un couplage avec deux plaques et avec une plaque

De même la figure (3.4) représente la partie imaginaire de la même impédance et l'on observe toujours un faible écart entre les deux courbes. Ainsi la présence de la deuxième plaque affecte peu le couplage de la plaque 1 avec le sol.

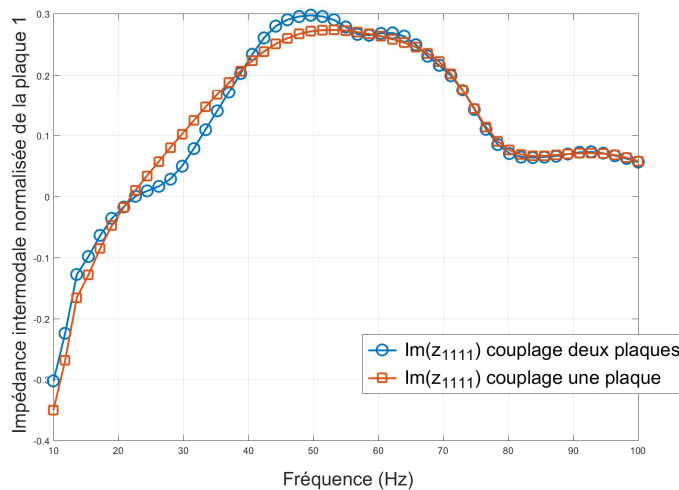


FIGURE 3.4 – Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire de la plaque 1 dans le cas d'un couplage avec deux plaques et avec une plaque

Ce résultat est confirmé lorsque l'on regarde la vitesse quadratique moyenne de la plaque 1 sur la figure (3.5). Il y a une superposition parfaite entre les deux vitesses selon si l'on couple une ou deux plaques à la surface du sol.

Les figures (3.6) et (3.7) correspondent aux parties réelles et imaginaires des impédances intermodales des modes de la plaque 1 sur les modes de la plaque 2. La partie réelle n'est plus toujours positive contrairement à ce que l'on a pu observer

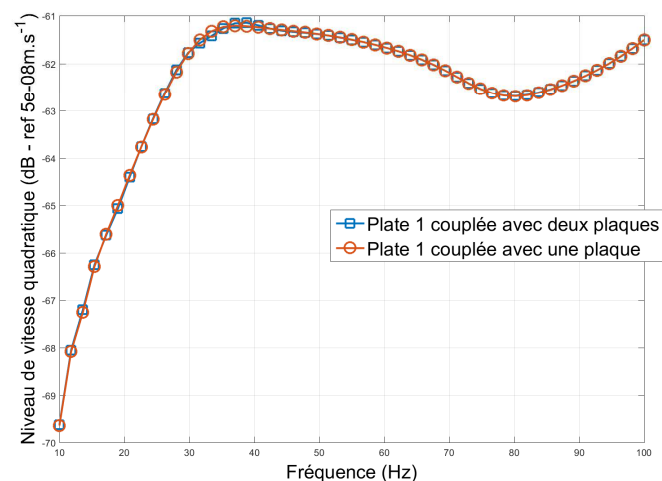


FIGURE 3.5 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque excitée par un effort ponctuel et couplée au sol en présence et en absence d'une deuxième dalle couplée au sol

dans le chapitre précédent. En effet la partie réelle traduit le transfert d'énergie entre les modes dans le milieu couplé. Dans le cas présent le changement de signe de la partie réelle de l'impédance intermodale traduit le fait que le mode de la plaque 1 transfère de l'énergie au mode de la plaque 2 ou bien il reçoit cette énergie. En ce qui concerne la partie imaginaire de l'impédance intermodale, on observe également plusieurs changements de signe. Ceci traduit les effets réactifs où un mode de plaque 2 agit sur un mode de plaque 1 soit en masse soit en raideur modale ajoutée.

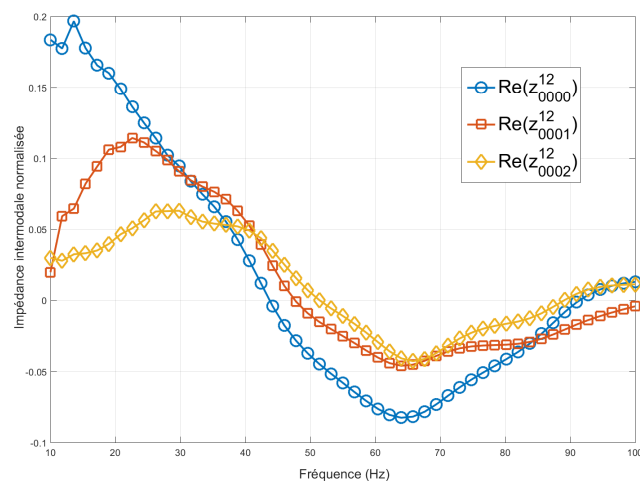


FIGURE 3.6 – Partie réelle de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire entre les modes de la plaque 1 et les modes de la plaque 2

Dans cette section nous avons pu observer quelques changements en ce qui concerne la valeur de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire lorsque deux plaques sont couplées au sol. Nous allons maintenant nous focaliser sur l'effet

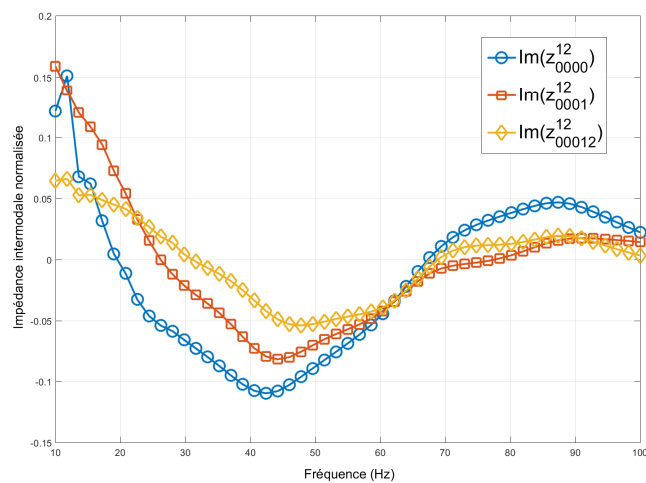


FIGURE 3.7 – Partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement vibratoire entre les modes de la plaque 1 et les modes de la plaque 2

d'une Barrière Vibratoire Horizontale comme solution pour atténuer les vibrations.

2.2 La Barrière Vibratoire Horizontale comme solution pour atténuer les vibrations

Les problèmes vibratoires dans le ferroviaire et les plaintes qui y sont associées sont en constante augmentation ces dernières années ce qui a entraîné la nécessité de concevoir des systèmes pouvant atténuer les vibrations se propageant à la surface et dans le sol. On peut classer les systèmes en trois grandes catégories selon qu'ils atténuent à la source, sur le chemin de propagation ou bien à la réception, dans les bâtiments.

On se propose ici d'introduire un système atténuant sur le chemin de propagation c'est à dire au niveau du sol. Il existe actuellement à la connaissance de l'auteur relativement peu de systèmes permettant d'atténuer les vibrations à la surface et dans le sol. Ces dernières années ont vu l'émergence d'une solution en particulier consistant à enfoncer verticalement dans le sol des barrières de béton. Ces systèmes sont enfoncés sur des profondeurs importantes ce qui les rend difficiles à concevoir et également très consommatrice de béton. On se propose de présenter ici une autre catégorie de solution atténuant les vibrations sur le chemin de propagation.

Le système en question nommé BVH pour **Barrière Vibratoire Horizontale** est une dalle en vibration de flexion posée à la surface du sol. Selon un rapport d'étude européen RIVAS [Mirza et al.(2012)Mirza, Smekal, Nelain, Thompson, Stiebel, Degrande, Lombaert, Verbraken, Garburg, and Cuellar, Vanstraelen(2013)] ce type de solution bien qu'envisagé n'a à ce jour pas encore fait l'objet d'études permettant de mettre en avant son éventuelle efficacité. C'est l'objet de cette section. Dans un premier temps, on considérera le cas d'une plaque aux dimensions réduites afin de comprendre la perturbation du champ vibratoire et l'influence des paramètres. Dans un second temps, on considérera le cas d'une dalle de tramway.

Afin de quantifier l'atténuation vibratoire, on moyenne le niveau de déplacement sur une surface donnée du sol, appelée surface de contrôle. On définit ce niveau de déplacement moyenné par :

$$u_{z-moy}^2 = \frac{1}{S} \iint_S |u_z(x, y, 0)|^2 dx dy \quad (3.27)$$

L'atténuation vibratoire due à la BVH sera donnée en perte par insertion par la formule suivante :

$$IL(\omega) = 10 \log \left(\frac{u_{z-moy-sans-BVH}^2}{u_{z-moy-avec-BVH}^2} \right) \quad (3.28)$$

2.2.1 Cas d'une dalle de petite taille

Dans ce paragraphe nous allons considérer deux dalles de béton dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : $E_p = 2.5 * 10^{10} Pa$, $\rho_p = 2500 Kg.m^{-3}$, $\nu_p = 0.3$ et $\eta_p = 0.05$. En ce qui concerne l'épaisseur de la BVH, les conditions de plaques minces ne seront pas toujours vérifiées cependant ces cas d'étude ont pour objet de mettre en avant des tendances.

La dalle (1) est une dalle carrée de $6m$ de côté et de $0.2m$ d'épaisseur. Cette dalle est excitée en son centre par un effort ponctuel d'amplitude $1N$. La dalle (2) qui correspond à la BVH a une longueur de $6m$. La surface de contrôle sur laquelle

on moyenne l'atténuation vibratoire a une surface de $6m$ de longueur et de $5m$ de largeur. La figure (3.8) donne une vue d'ensemble du problème étudié ainsi que la surface de contrôle qui servira de référence.

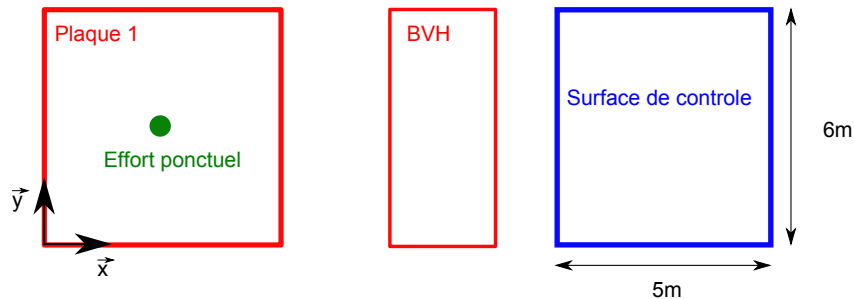


FIGURE 3.8 – Vue de dessus de la dalle excitatrice et de la BVH

Le sol considéré est un sol monocouche semi-infini dont les caractéristiques sont les suivantes : $c_s = 250m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$

2.2.1.1 Vitesses quadratiques moyennes des plaques

La BVH (plaque 2) a une largeur de $4m$, une épaisseur de $0.2m$ et est positionnée à $2m$ de la plaque 1 excitée. La figure (3.9) correspond à la vitesse quadratique moyenne de la plaque 1 et 2 couplées au sol. La vitesse quadratique moyenne de la plaque 1 excitée se situe entre $-70dB$ et $-60dB$ tandis qu'il se situe entre $-90dB$ et $-80dB$ pour la BVH ce qui correspond à une chute du niveau vibratoire de $25dB$ en moyenne.

Afin d'avoir une représentation de la perturbation du champ vibratoire par la BVH, on trace des cartographies du déplacement vibratoire à la surface du sol. La figure (3.10) correspond à une cartographie du déplacement vibratoire à $70Hz$ lorsqu'une seule plaque est couplée au sol.

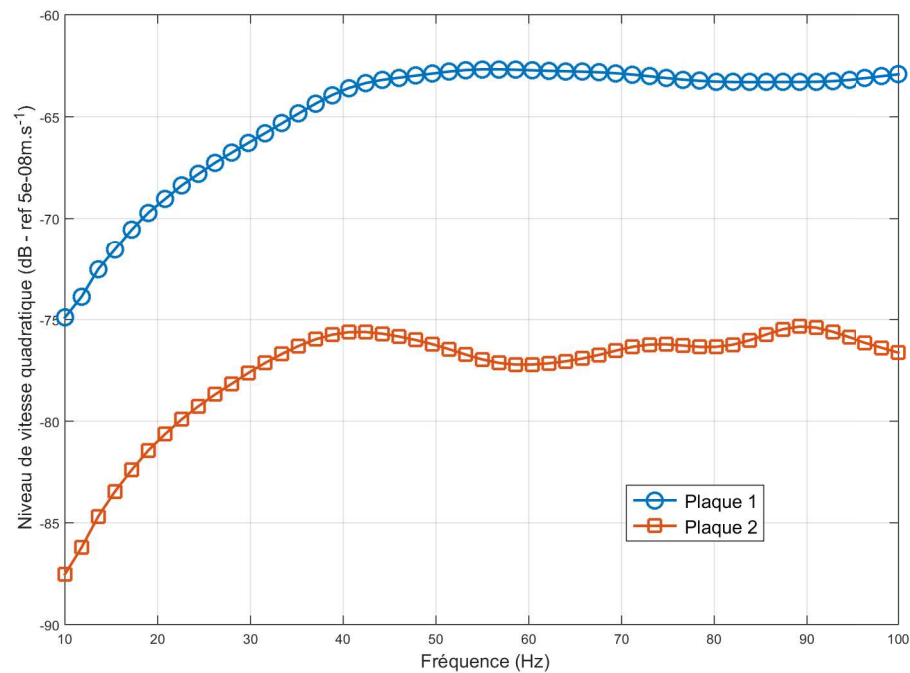


FIGURE 3.9 – Vitesse quadratique moyenne des deux plaques couplées au sol

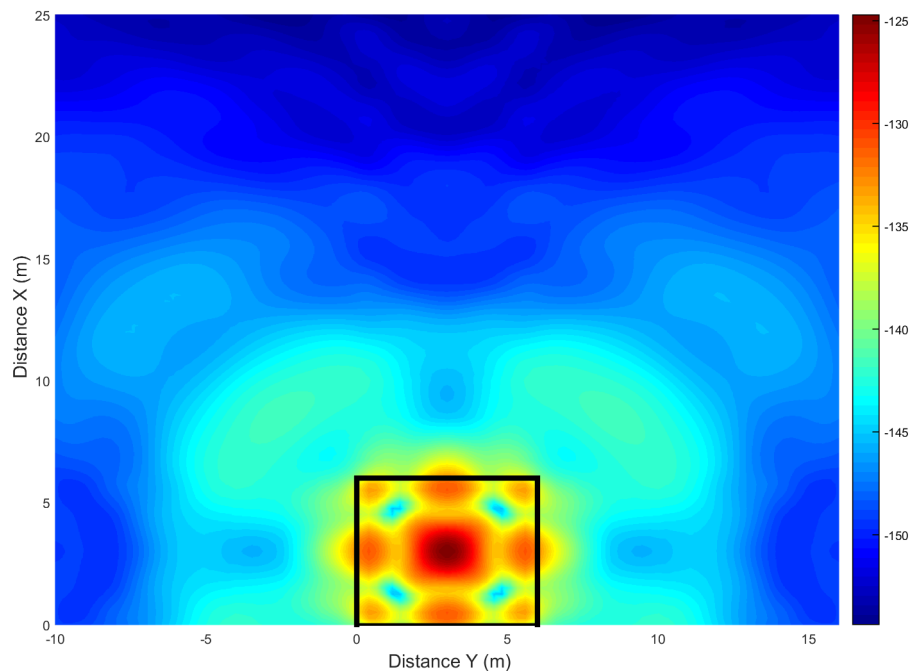


FIGURE 3.10 – Cartographie du niveau d'accélération vibratoire à la surface du sol dans le cas d'une plaque couplée au sol à 70Hz

Cette plaque est également excitée en son centre. Les traits noirs représentent les bords de la plaque. La figure (3.11) représente la même configuration mais en présence de la BVH. On voit bien que le champ vibratoire est perturbé par la présence de la BVH et qu'il se trouve atténué comme indiqué par l'apparition de la zone bleue foncée.

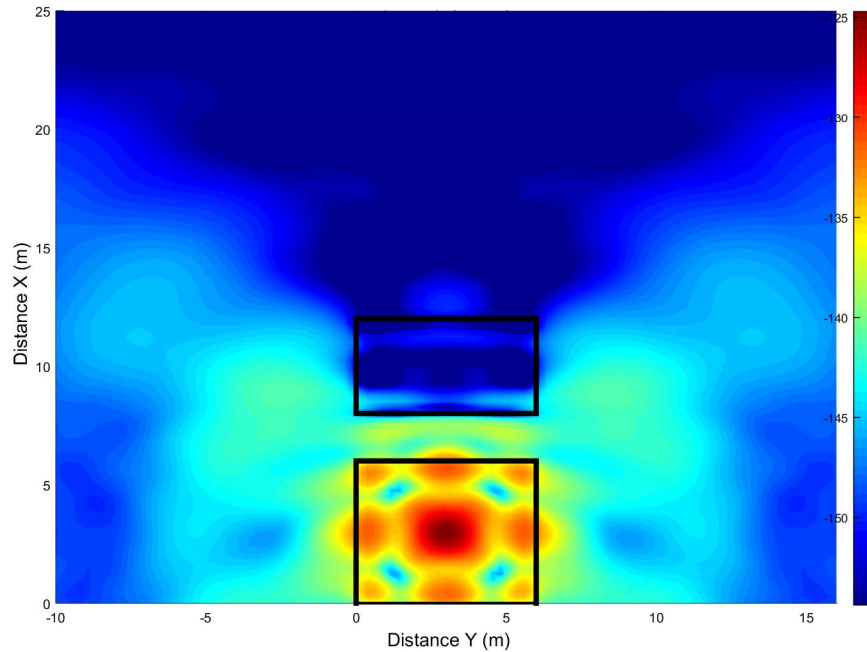


FIGURE 3.11 – Cartographie du niveau d'accélération vibratoire à la surface du sol dans le cas de deux plaques couplées au sol, la dalle excitatrice et la BVH à 70Hz

Pour une meilleur quantification la figure (3.12) représente l'atténuation vibratoire entre le cas avec BVH et le cas sans BVH. On observe un cône d'atténuation qui est typique d'un phénomène de diffraction. Les ondes arrivant sur les bords de la BVH sont déviées et créent une zone d'ombre derrière la BVH.

La figure (3.13) montre une cartographie du sol en coupe dans le plan (x, z) dans lequel l'effort est appliqué sur la plaque i.e $y = \frac{L_{y1}}{2}m$.

Cette cartographie est à comparer avec la cartographie de la figure (3.14) où l'on représente le cas de la dalle excitée et de la BVH. On observe que les ondes envoyées par la dalle 1 sont réfléchies par la BVH créant ainsi un niveau plus important sous la dalle 1 et dans la profondeur derrière la BVH. En revanche à la surface du sol derrière la BVH les ondes sont atténuées.

Dans ce premier paragraphe, nous avons pu voir que la BVH a un réel effet sur le champ vibratoire à la surface du sol. Nous allons maintenant identifier l'ensemble des paramètres ayant une influence sur la perte par insertion créée par la BVH.

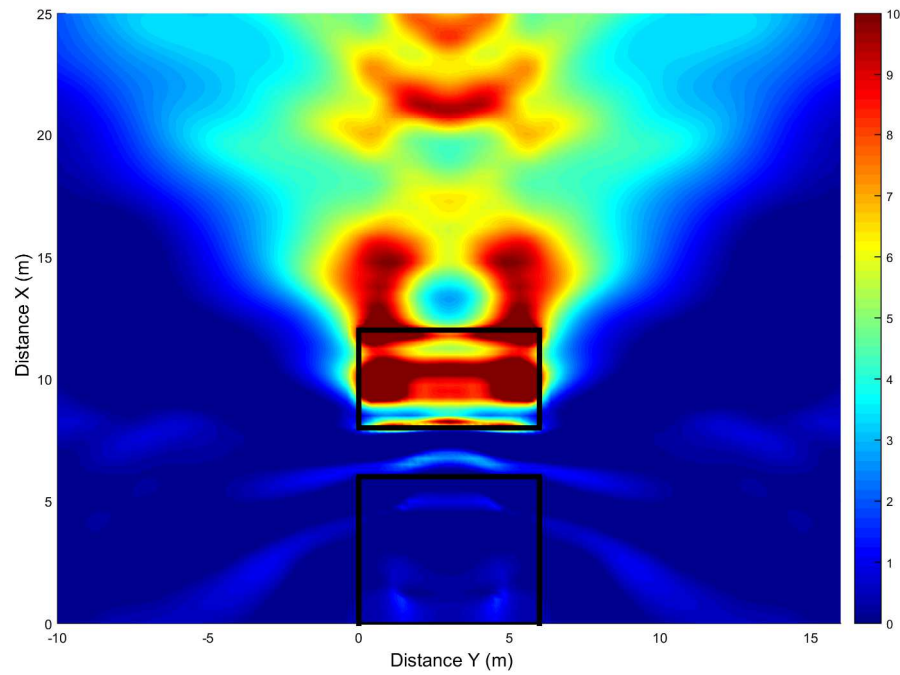


FIGURE 3.12 – Cartographie du niveau d'atténuation vibratoire à la surface du sol causées par la BVH à 70Hz

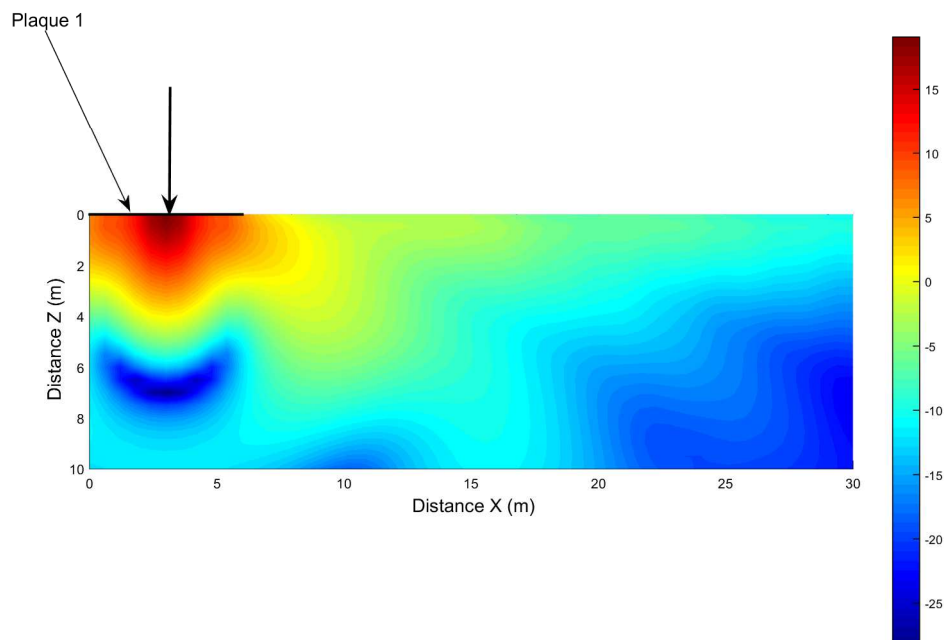


FIGURE 3.13 – Cartographie du niveau de déplacement vibratoire dans la profondeur à 50Hz dans la section $y = \frac{L_{y1}}{2}$ dans le cas d'une plaque couplée au sol

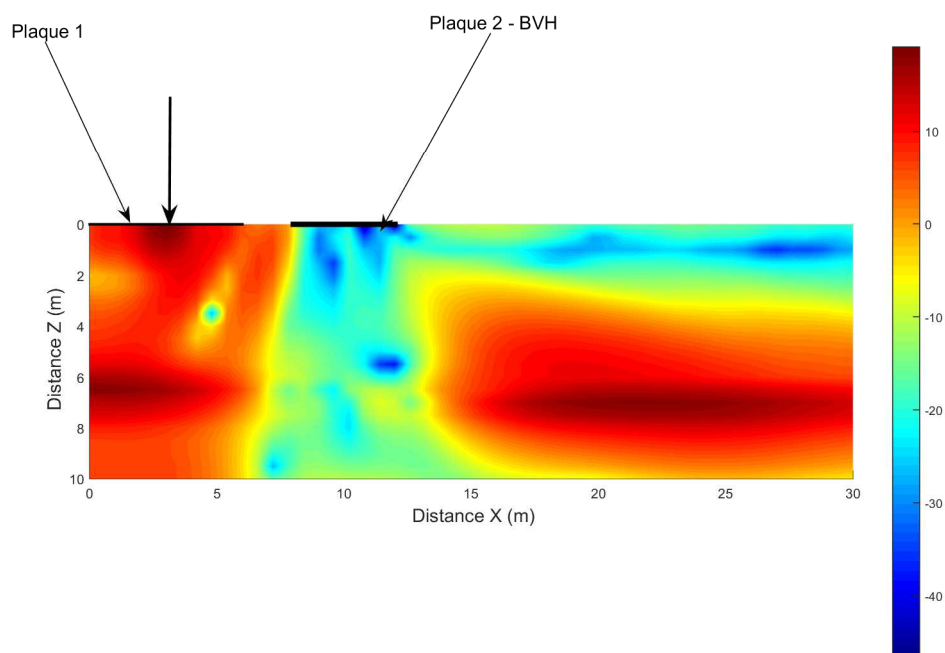


FIGURE 3.14 – Cartographie du niveau de déplacement vibratoire dans la profondeur à 50Hz dans la section $y = \frac{L_{y1}}{2}$ dans le cas de deux plaques couplées au sol

2.2.1.2 Influence de la largeur de la BVH

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de la largeur de la BVH c'est à dire de L_{x2} . On fixe l'épaisseur de la BVH à $0.6m$. La figure (3.15) correspond à l'atténuation vibratoire sur une surface pour une largeur de BVH de $1m$, $2m$ et $4m$. On observe que la largeur de la BVH est un paramètre de premier ordre. Pour une largeur de $1m$ l'atténuation commence à partir de $70Hz$, pour une largeur de $2m$ l'atténuation commence à partir de $50Hz$ et pour une largeur de $4m$ l'atténuation commence à partir de $30Hz$. Ainsi on peut identifier un premier critère qui consiste à avoir une largeur de BVH plus grande de deux longueurs d'onde que l'onde de Rayleigh.

$$a_{p2} > 2\lambda_R \quad (3.29)$$

La pente d'atténuation pour la BVH de largeur $4m$ est de $0.3dB$ par Hertz. Ces pentes sont de $0.12dB$ par Hertz pour les largeurs de $1m$ et $2m$.

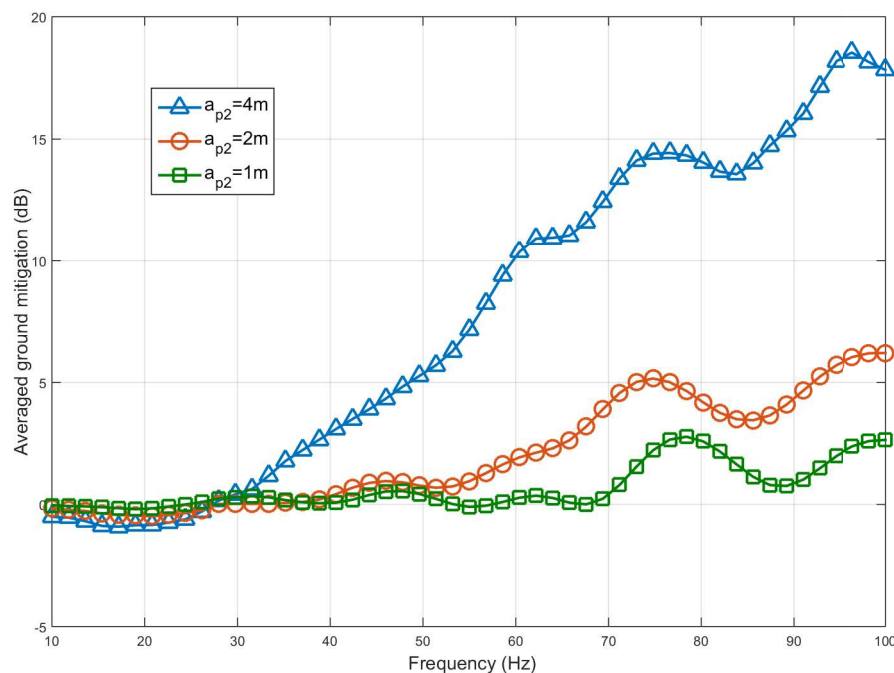


FIGURE 3.15 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de $6m$ de long et $5m$ de large pour différentes largeurs de la BVH

Ce premier critère peut être mis en parallèle avec le cas acoustique. En effet on sait qu'un piston plan circulaire présente un optimum de rayonnement lorsque la longueur d'onde est supérieure ou égale à deux fois le rayon du piston. Dans notre problème, le rayonnement de la structure est important dans le sens où c'est à partir de cette longueur d'onde qu'elle capte les vibrations issues du sol. [Lesueur(1988)]

Un premier critère vient d'être identifié sur la largeur minimum de la BVH afin de commencer à atténuer les vibrations. Nous allons maintenant étudier l'influence de l'épaisseur de la BVH.

2.2.1.3 Influence de l'épaisseur de la BVH

Dans ce paragraphe, nous considérons une plaque de largeur $L_{x2} = 4m$ et nous étudions l'influence de l'épaisseur de la dalle sur l'atténuation vibratoire. La figure (3.17) correspond à l'atténuation vibratoire sur une surface moyenne derrière la BVH pour une épaisseur de $0.2m$, $0.4m$ et $0.6m$. De même que précédemment il existe une fréquence à partir de laquelle la BVH commence à atténuer les vibrations. Pour une épaisseur de $h_{p2} = 0.6m$, l'atténuation commence à $20Hz$, pour $h_{p2} = 0.4m$ c'est $30Hz$ et pour $h_{p2} = 0.2m$ c'est $40Hz$. Cette fréquence correspond donc à une double coïncidence ; spatiale entre le nombre d'onde mécanique de la BVH et de cisaillement, et fréquentielle entre la pulsation de la plaque et celle de l'onde de cisaillement. Ainsi on obtient le critère suivant de fréquence critique :

$$f_c = \frac{c_s^2}{2\pi h_2} \sqrt{\frac{12\rho_2(1 - \nu_2^2)}{E_2}} \quad (3.30)$$

Ce phénomène est bien connu en rayonnement acoustique. [Lesueur(1988)] La figure (3.16) correspond à l'évolution de la célérité de flexion de la structure et de la célérité de cisaillement en fonction de la fréquence. Cela permet d'observer la coïncidence entre l'augmentation de l'atténuation vibratoire de la BVH et le dépassement de la célérité de flexion par rapport à la célérité de cisaillement.

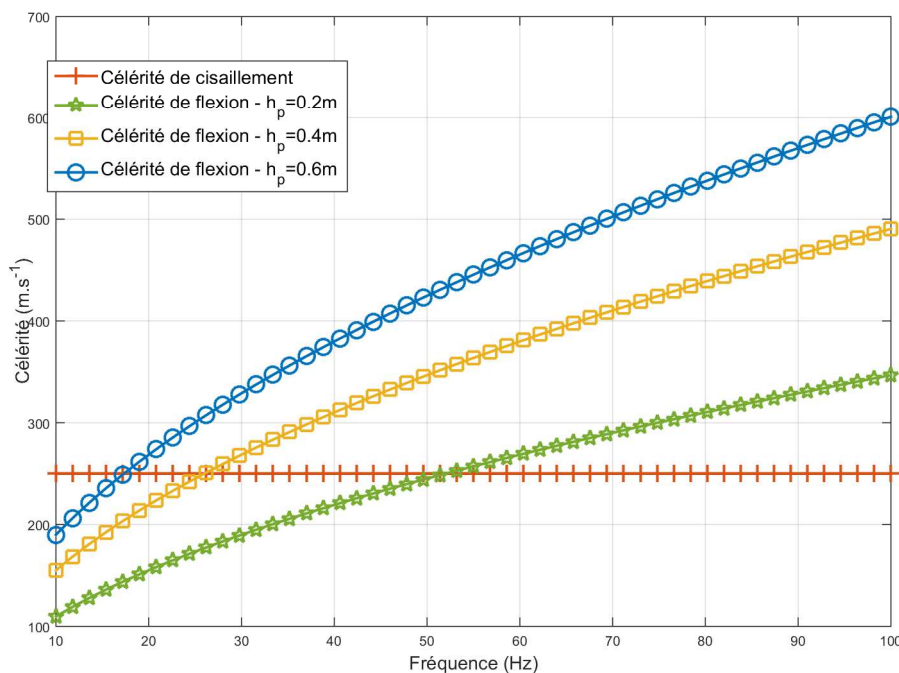


FIGURE 3.16 – Evolution de la célérité de flexion et de cisaillement en fonction de la fréquence

Un nouveau critère vient d'être identifié afin d'obtenir une BVH pour atténuer les vibrations à savoir que l'épaisseur doit être suffisamment importante. Ce critère

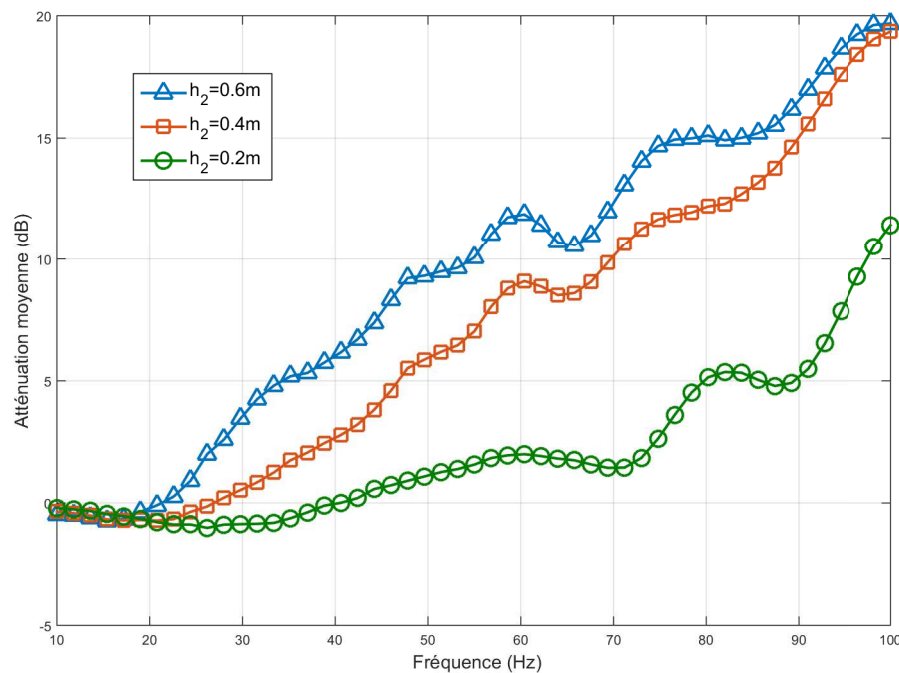


FIGURE 3.17 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différente épaisseur de la BVH

traduit la rigidité que doit posséder la structure par rapport au sol. Plus la structure est épaisse et plus sa rigidité augmente ce qui crée une forte rupture d'impédance en surface ce qui contribue au blocage du sol en surface.

Un dernier paramètre intéressant à étudier est la position de la BVH

2.2.1.4 Influence de la position de la BVH

Dans ce paragraphe, nous considérerons une plaque d'épaisseur $0.6m$ et de largeur $4m$ afin d'être dans les conditions optimums d'atténuation telles que définies précédemment. La BVH va être déplacée suivant l'axe x à des positions $e_x = 2m$, $e_x = 4m$ et $e_x = 6m$ et l'on a $e_y = 0m$ suivant y . La figure (3.18) correspond à l'atténuation vibratoire sur une surface moyenne pour ces différentes positions. On voit que la position de la dalle est de second ordre sur l'atténuation vibratoire car il n'y a pas de différences notables avant 60Hz et même au delà de cette fréquence la différence entre les atténuations est en moyenne de 1 ou 2dB.

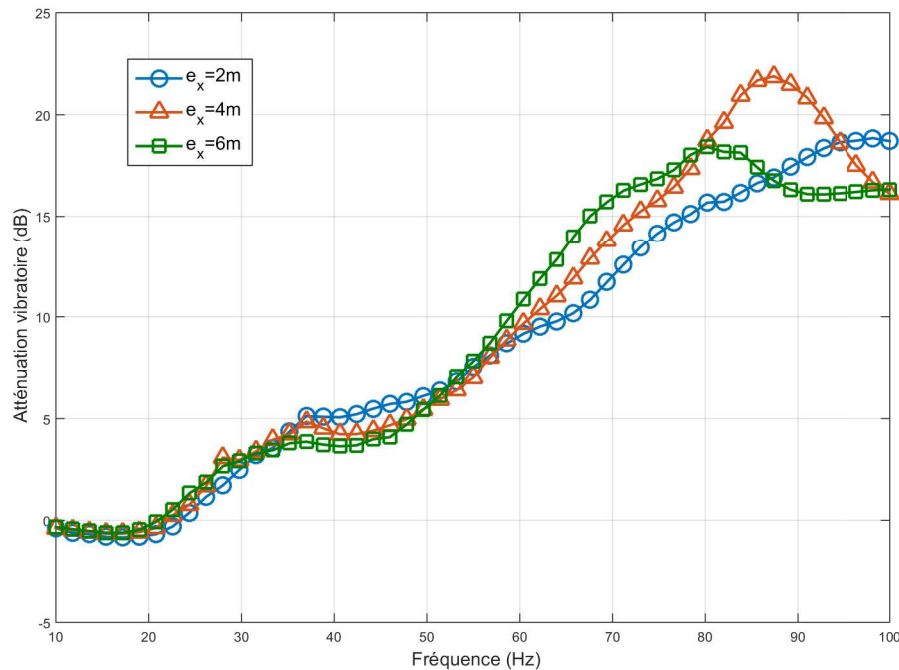


FIGURE 3.18 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différentes positions de la BVH

Dans cette première section, nous avons pu identifier les paramètres de première importance sur l'atténuation vibratoire due à la BVH. Ces paramètres sont :

- la largeur qu'il est nécessaire d'avoir suffisamment grande, de l'ordre de deux longueurs d'onde de cisaillement
- l'épaisseur définissant la rigidité de la structure et créant une rupture d'impédance avec le sol en surface : phénomène lié à la célérité de flexion qui devient supérieure à la célérité de cisaillement dans le sol.

On note, dans cette étude, l'atténuation importante apportée par la BVH de l'ordre de 10dB à 15dB. Ces atténuations sont du même ordre de grandeur qu'une barrière enfoncée verticalement dans le sol. Cependant il est à noter que cette efficacité est fortement dépendante du type de sol et que plus le sol sera raide plus il sera difficile géométriquement et mécaniquement de l'atténuer. Nous verrons dans la partie suivante un exemple d'atténuation vibratoire moyenne pour deux types de sol, dans le cas d'une plaque excitée aux dimensions d'une dalle de tramway.

2.2.2 Cas d'une dalle de tramway

Dans cette section, les dimensions des deux dalles vont être changées afin de se placer dans une configuration correspondant aux cas des dalles de tramway. La dalle excitatrice, assimilée à la dalle de tramway, a une longueur de 28m, une largeur de 6.6m et une épaisseur de 0.6m. Cette dalle sera en béton. La BVH aura la même longueur que la dalle excitatrice à savoir $L_{y2} = 28m$, une largeur de $L_{x2} = 4m$ et aura également les caractéristiques mécaniques du béton.

Dans un premier temps nous allons considérer le cas d'un seul effort ponctuel localisé au centre de la dalle excitatrice c'est à dire au point de coordonnées $(3.3m; 14m)$. La surface de contrôle sur laquelle on calcule l'atténuation aura la même surface que précédemment c'est-à-dire une longueur de $6m$ dans l'axe de la voie et $5m$ perpendiculairement à la voie comme le montre la figure (3.21).

La figure (3.19) correspond à l'atténuation moyenne à $1m$ derrière la BVH pour différentes épaisseurs de BVH. Le sol est un sol monocouche ayant les caractéristiques suivantes : $c_s = 250m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. On observe que le critère précédemment établi sur la fréquence critique à partir de laquelle la BVH atténue les vibrations est toujours valide. On observe des niveaux vibratoires allant jusqu'à 10dB à 15dB traduisant une réelle efficacité de la barrière.

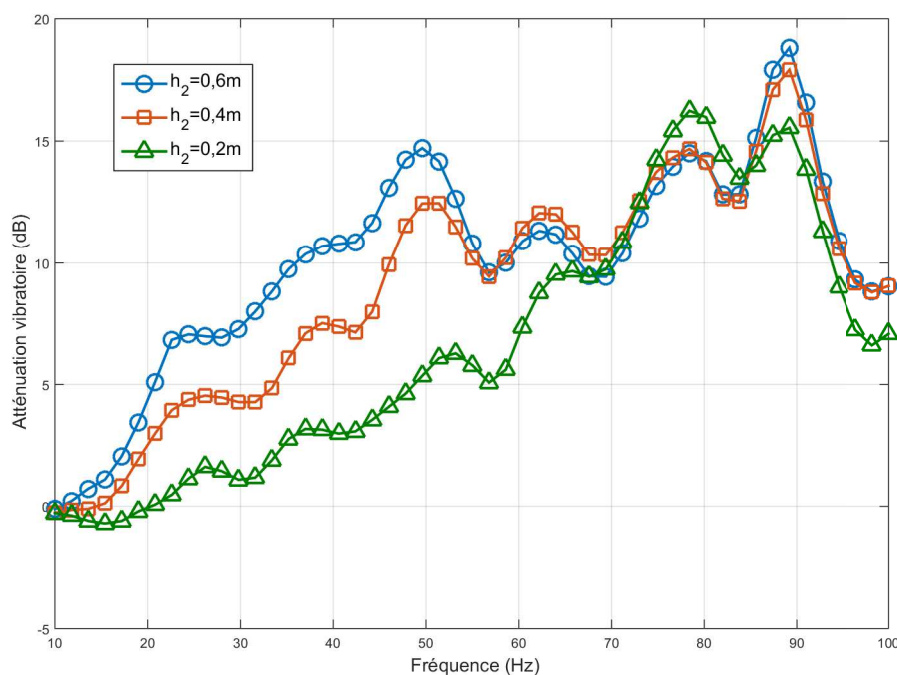


FIGURE 3.19 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de $6m$ de long et $5m$ de large pour différentes hauteurs de la BVH suite à une excitation sur une dalle de tramway

La figure (3.20) correspond à l'atténuation moyenne à $1m$ derrière la BVH pour différents types de sol avec une BVH d'épaisseur $0.6m$. On observe bien que les caractéristiques du sol ont une influence sur la performance de la BVH. Plus le sol est mou et plus la BVH sera efficace à basse fréquence suivant le critère énoncé à l'équation (3.30)

Nous allons désormais étudier l'atténuation vibratoire de la BVH dans le cas où il y a plusieurs sources d'excitation sur la dalle 1. La figure (3.21) correspond à une vue d'ensemble du problème considéré où 5 efforts excitent la plaque 1. Afin d'obtenir des résultats comparables avec ceux établis précédemment, les efforts auront une amplitude de $1/5N$ chacun en phase et seront localisés dans l'axe d'une des voies de tramway c'est-à-dire au point $(\frac{L_{x1}}{4}, \frac{L_{y1}}{6})$, $(\frac{L_{x1}}{4}, \frac{2*L_{y1}}{6})$, $(\frac{L_{x1}}{4}, \frac{3*L_{y1}}{6})$, $(\frac{L_{x1}}{4}, \frac{4*L_{y1}}{6})$ et

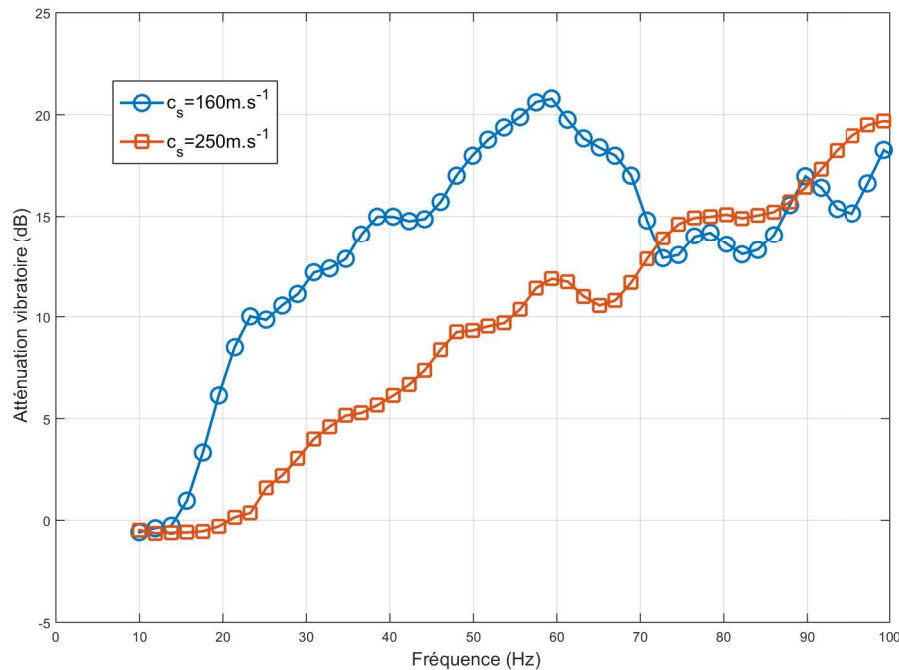


FIGURE 3.20 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large pour différents types de sol suite à une excitation ponctuelle sur une dalle de tramway

$$\left(\frac{L_{x1}}{4}, \frac{5 \cdot L_{y1}}{6}\right).$$

La figure (3.22) correspond à l'atténuation moyenne à la surface du sol pour différentes positions d'excitation sur la dalle 1. On observe que la localisation des efforts sur la structure a une importance sur l'atténuation due à la BVH. En effet les modes de plaque 1 et BVH couplés entre eux peuvent entraîner une atténuation plus ou moins importante suivant la localisation des efforts cependant la tendance en atténuation de la BVH reste valide.

Dans cette section, nous avons mis en avant les capacités de la BVH à atténuer les vibrations se propageant à la surface du sol. Ces atténuations peuvent être conséquentes, de l'ordre de 10dB à 15dB, et permettent ainsi d'envisager une nouvelle catégorie de solution vibratoire lorsqu'une voie ferrée est déjà installée.

Nous allons maintenant exploiter le modèle de deux plaques pour étudier les vibrations des fondations d'un bâtiment.

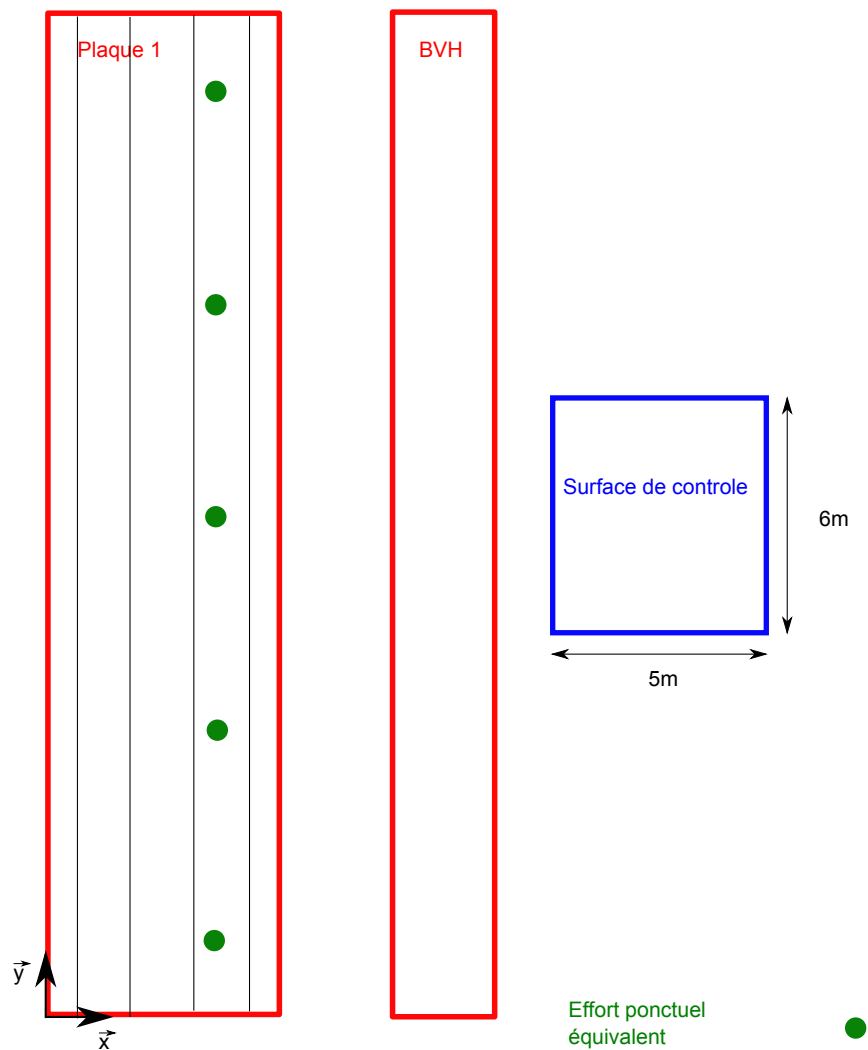


FIGURE 3.21 – Vue de dessus de la dalle de tramway excitée par 5 efforts ponctuelles en présence de la BVH pour atténuer les vibrations

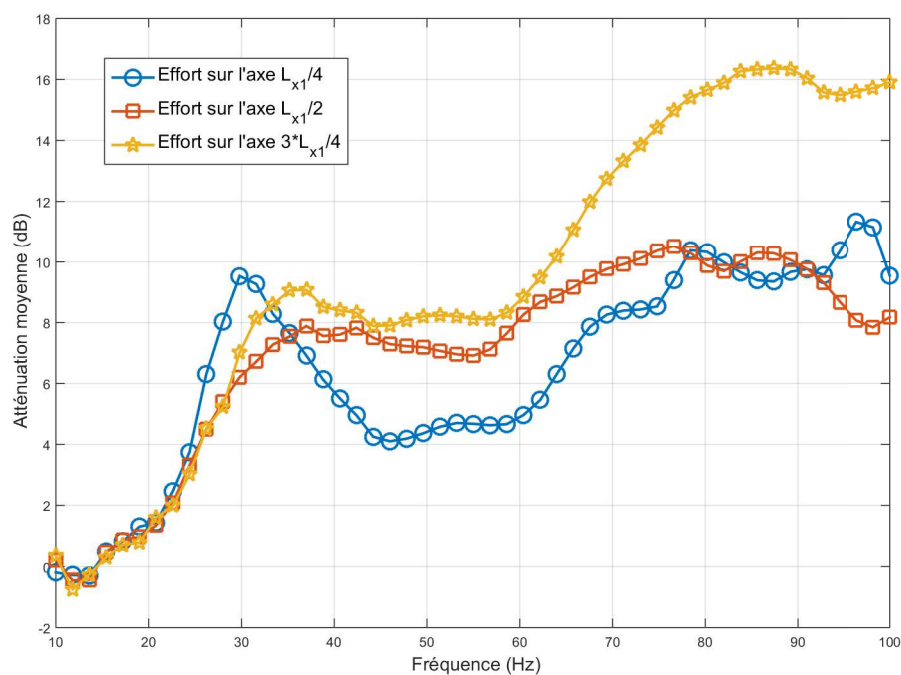


FIGURE 3.22 – Atténuation vibratoire moyenne sur une surface du sol rectangulaire de 6m de long et 5m de large dans le cas de 5 efforts sur la dalle excitée repartir le long de l'axe de la voie

2.3 Niveau de contrainte généré sur un bâtiment

Lorsque l'on étudie l'impact vibratoire de l'implantation d'une voie de tramway, l'intérêt majeur est de connaître le niveau vibratoire transmis dans un bâtiment à proximité des voies ferrées. [Ropars(2011), Villot et al.(2011)] Villot, Ropars, Jean, Bongini, and Poisson] Ce bâtiment possède des fondations à partir desquels l'énergie provenant du sol est transmise. Cette énergie transmise constitue une donnée d'entrée lorsque l'on modélise un bâtiment (maison, immeuble...) qui vibre. On se propose ici d'étudier cette donnée d'entrée.

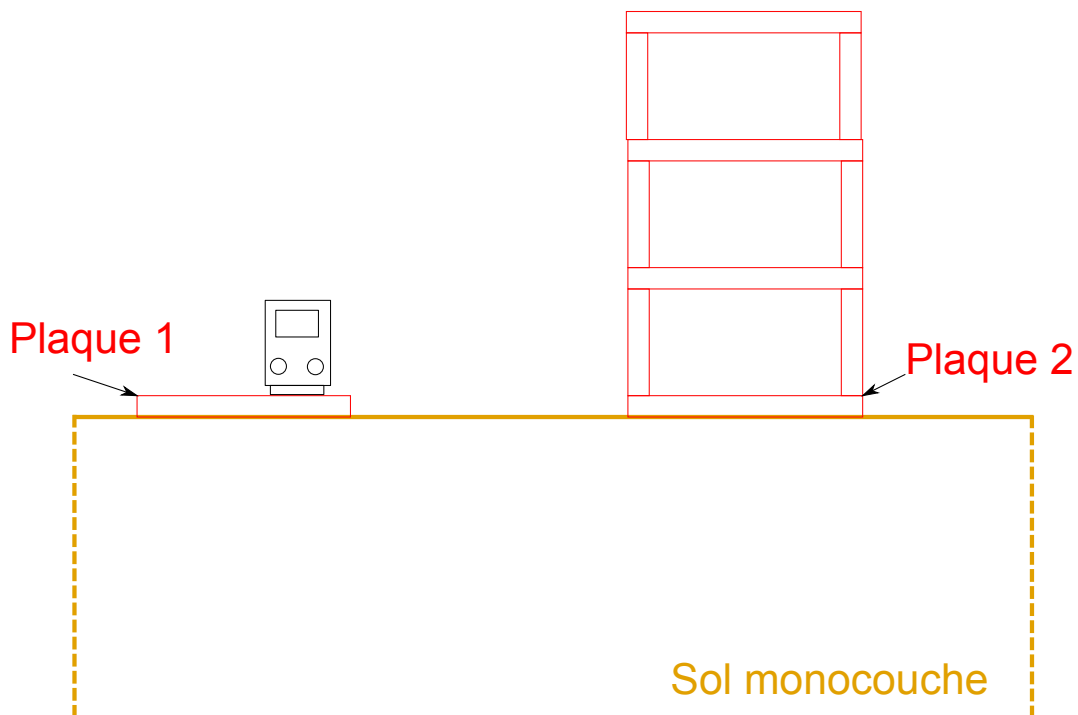


FIGURE 3.23 – Représentation d'un cas réel de couplage de deux plaques avec le sol

Dans un premier temps, nous allons donner l'expression de la contrainte appliquée par le sol sur la plaque 2. En rappelant l'expression 3.11, on a :

$$\sigma_2(x, y) = \sum_{pq} Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) \quad \forall (x, y) \in S_2 \quad (3.31)$$

La contrainte quadratique moyenne sera donnée par :

$$\langle \sigma_2(x, y)^2 \rangle = \frac{1}{2L_{x2}L_{y2}} \sum_{pq} |Z_{pq}(\omega) b_{pq}(\omega)|^2 S_{pq} \quad (3.32)$$

La donnée de la puissance injectée est importante dans la mesure où elle alimente de nombreux modèles de type SEA (Statistical Energy Analysis) pouvant représenter la propagation vibratoire dans un bâtiment.

Considérons une plaque excitatrice ayant les caractéristiques d'une dalle de tramway à savoir une dalle de béton ($E_p = 2.5 * 10^{10} Pa$, $\rho_p = 2500 Kg.m^{-3}$, $\nu_p = 0.3$ et $\eta_p = 0.05$) de longueur $L_{y1} = 28m$, de largeur $L_{x1} = 6.6m$ et d'épaisseur $h_{p1} = 0.6m$.

La plaque 2 représente les fondations d'un bâtiment à proximité de la voie. On ne considère ici que la fondation exposée dans la longueur de la voie. Trois types de dimensions seront considérées pour les fondations en béton à savoir une longueur de $L_{y2} = 6m$ et une largeur de $L_{x2} = 6m$, $L_{x2} = 3m$ et $L_{x2} = 1m$. Elle se situe à la position $e_{x2} = 5m$ et $e_{y2} = 11m$ par rapport à la plaque 1. Les deux plaques reposent sur un sol monocouche semi-infini ayant les caractéristiques suivantes : $c_s = 250m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$. L'objectif est d'observer les contraintes maximums que peut recevoir la fondation lorsque celle-ci est fortement couplée au sol.

La figure 3.24 représente la contrainte quadratique moyenne de la fondation pour différentes épaisseurs. L'augmentation de l'épaisseur permet de traduire les fortes contraintes que l'immeuble applique sur ses fondations. On observe que la contrainte quadratique moyenne tend vers une constante lorsque l'épaisseur est suffisamment importante c'est-à-dire pour $h_{p2} = 25.6m$. Ainsi cela nous donne l'information de la contrainte maximum qui est reçue par le bâtiment.

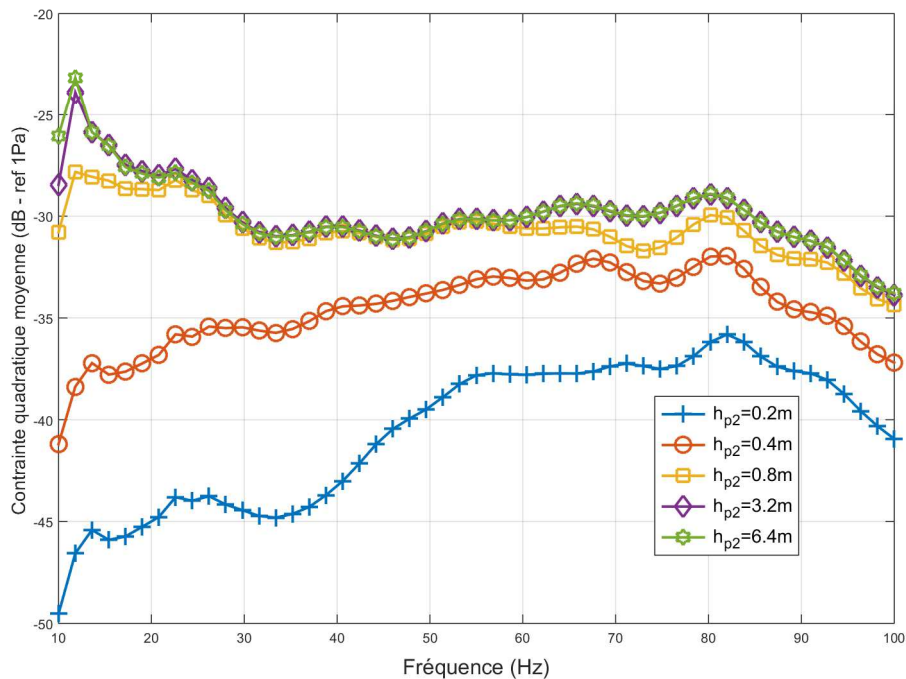


FIGURE 3.24 – Contrainte quadratique moyenne d'une plaque

La figure 3.25 correspond à la contrainte quadratique moyenne de la plaque 2 pour différentes largeurs à savoir $L_{x2} = 6m$, $L_{x2} = 3m$ et $L_{x2} = 1m$. L'épaisseur est prise suffisamment grande pour que la contrainte soit maximisée. On observe que la valeur de la contrainte est identique en tendance et présente un décalage lorsque la largeur diminue. La diminution de la largeur de la plaque 2 entraîne une augmentation de environ 4dB lorsque l'on passe de 6m à 3m et de environ 5dB lorsque l'on passe de 3m à 1m.

Les contraintes quadratiques moyennes arrivant sur la plaque 2 sont évidemment dépendantes du sol et de la distance entre la plaque 1 et la plaque 2. Cependant une

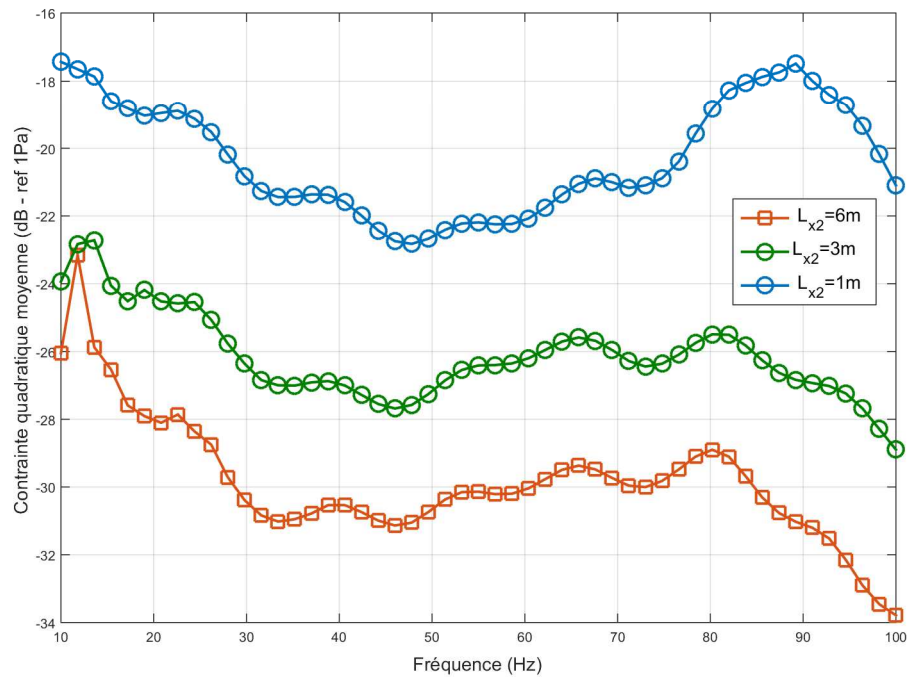


FIGURE 3.25 – Contrainte quadratique moyenne d'une plaque ayant différentes largeurs

fois connue les caractéristiques du sol et la configuration de la voie par rapport au fondation, il est possible de maximiser l'énergie reçue par le bâtiment.

Il est important ici de rappeler l'étendue que peut avoir ce type de résultat en terme d'étude vibratoire lors de l'implantation de nouvelles lignes. Les modèles classiquement utilisés pour modéliser l'interaction entre une plateforme de tramway et les fondations d'un bâtiment se basent sur les méthodes éléments finis et éléments de frontière. La prise en compte du sol et de ces stratifications sont lourdes en temps de calcul mais permettent cependant d'étudier la retransmission des vibrations à tous les étages d'un bâtiment tel que le fait MEFISSTO. Le couplage d'un modèle analytique présenté dans ce document avec des outils prenant en compte la transmission dans le bâtiment offre ainsi l'opportunité d'un gain de temps considérable.

Dans cette section, nous avons mis en avant une autre utilisation possible du modèle de deux plaques couplées au sol. Il est ainsi possible de renseigner en tant que donnée d'entrée des modèles modélisant la vibration d'un bâtiment.

2.4 Etude d'un type de pose de dalle de tramway

Dans cette section, nous abordons la question du type de pose de plateforme ferroviaire que l'on peut utiliser afin de réduire la transmission à la surface du sol. Dans de nombreux cas, deux types de pose de dalle de tramway sont couramment utilisés à savoir la pose d'une dalle de 6.6m de large ou deux dalles de 3.3m de large chacune.

Il a été récemment mise en place une pose de dalle où chaque rail reposait sur une poutre en béton. L'intérêt majeur de ce type de pose est la réduction de la quantité de béton utilisée. Nous allons voir ici que d'un point de vue vibratoire, ce type de pose est également intéressant.

La figure 3.26 correspond au deux type de pose que nous allons considérer à savoir une pose classique (gauche) où la dalle a une largeur de 6.6m et une pose nouvelle où deux poutres de béton supporte les rails.

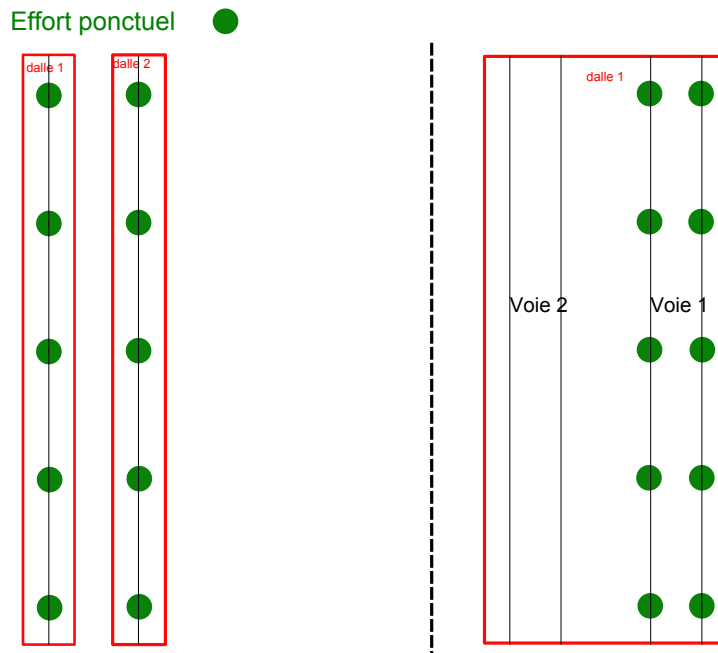


FIGURE 3.26 – Comparaison de deux type de pose de dalle de tramway

Nous allons utiliser la modélisation de deux plaques couplées au sol afin de comprendre l'intérêt d'une telle pose d'un point de vue vibratoire. Le sol considéré est un sol monocouche ayant les caractéristiques mécaniques suivantes : $c_s = 400.s^{-1}$, $c_p = 1000m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$ et $\rho = 1500Kg.m^{-3}$. Nous observons dans une premier temps le niveau de vitesse vibratoire sur une surface moyenne de 5m perpendiculairement à la voie par 6m parallèlement à la voie à une distance 2m et 11m.

La figure 3.27 correspond aux vitesses quadratiques moyennes des plaques dans le cas d'un couplage avec une plaque et dans le cas d'un couplage avec deux plaques. On observe des vitesses quadratiques moyennes quasi identiques. Ainsi les deux structures on un comportement vibratoire identique.

La figure 3.28 correspond à la vitesse vibratoire sur une surface moyenne à la surface du sol. La vitesse vibratoire à la surface du sol a été moyennée sur une

surface située à $1m$ de la structure excitatrice et de longueur $6m$, de largeur $4m$. On observe que la pose sur "voie double" présente un niveau de vitesse vibratoire bien plus faible que la pose sur "voie simple". Ceci est dû au fait que la surface de contact est moins importante pour la "voie double" que pour la "voie simple" donc même si les niveaux de vitesses quadratiques moyennes sont identiques, la transmission à la surface du sol est moins importante. En terme de rayonnement vibratoire, le rayonnement maximum est décalé vers des fréquences plus hautes pour la "voie double" que pour la "voie simple". En revanche lorsque l'on monte en fréquence, la "voie double" rayonne plus dans le sol car les longueurs d'onde se propageant dans le sol commencent à être de l'ordre de grandeur de la structure. ($4m$ à $100Hz$)

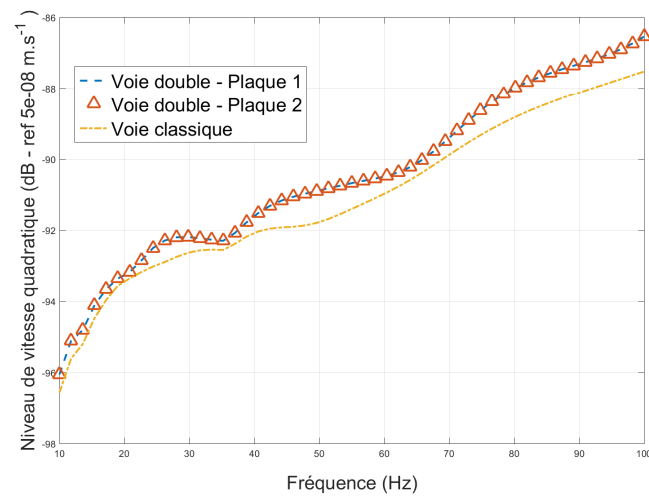


FIGURE 3.27 – Vitesse quadratique moyenne des plaques dans le cas d'une pose avec double structure et dans le cas d'une pose simple structure

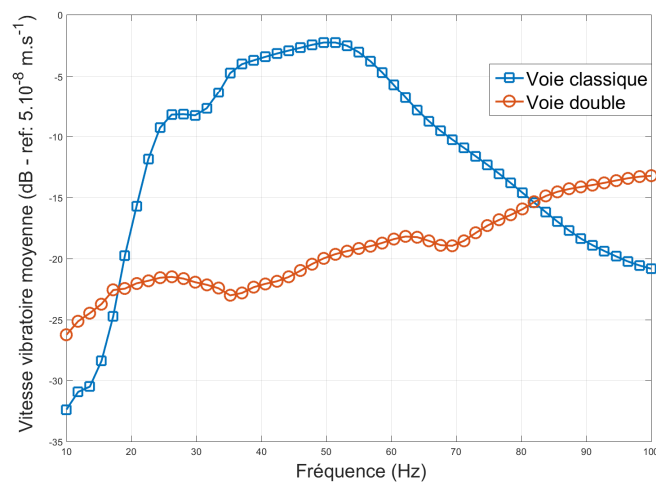


FIGURE 3.28 – Vitesse vibratoire sur une surface moyenne à la surface du sol dans le cas d'une pose avec double structure et dans le cas d'une pose simple structure

3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la modélisation de deux plaques couplées à un sol homogène semi-infini. Il a été mis en avant à travers quelques applications que ce type de modèle présente un grand intérêt pour des applications du génie civil.

Il a été introduit une nouvelle catégorie de barrière vibratoire qui possède des propriétés d'atténuation très prometteuses. En effet la BVH est un système qui atténue sur le chemin de propagation et qui peut atténuer les vibrations jusqu'à 10dB à 15dB ce qui est considérable dans le sol. De plus la modélisation de la BVH a mis en avant deux critères essentiels afin d'avoir une BVH efficace. Le première concerne la largeur de la BVH qui doit être deux fois plus grande que la longueur d'onde de cisaillement. Le second concerne la célérité des ondes de flexion qui doit être plus grande que la célérité des ondes de cisaillement.

Nous avons également montré que la modélisation de deux plaques donnait une information intéressante sur la puissance maximale injectée dans les fondations d'un bâtiment. En effet les modèles permettant la modélisation de bâtiment nécessitent de connaître le niveau de contrainte arrivant sur le bâtiment en donnée d'entrée. Ainsi ce modèle permet d'accélérer considérablement la vitesse de calcul par rapport aux modèles éléments finis pour le bâtiment car il ne nécessite plus de modéliser la dalle de tramway et les fondations d'un bâtiment. Cependant on notera tout de même que seul le cas de fondation à la surface du sol pourra être considéré.

Enfin nous avons mis en évidence que le modèle peut également être un outil intéressant pour la conception des voies de tramway. Toujours dans une optique de réduction des niveaux vibratoires se propageant à la surface, des poses de "voie double" ont été imaginées. Ces poses sont dans un premier temps imaginées dans une optique de réduction de la consommation de béton mais présentent également des intérêts d'un point de vue vibratoire car elles réduisent la surface en contact avec le sol et donc la puissance injectée au sol.

Dans les deux précédents chapitres, nous avons modélisé une dalle de tramway puis nous avons pu prendre en compte l'effet d'une deuxième dalle pouvant représenter diverses structures. La dernière information essentielle qu'il convient d'obtenir pour effectuer une étude prédictive pertinente des niveaux vibratoires injectés dans un bâtiment est de connaître l'effort injecté au passage d'un tramway. Un dernier chapitre d'ouverture sur cette problématique va être un problème inverse pour l'identification des efforts va être effectué.

Chapitre 4

Caractérisation d'efforts équivalents appliqués par un tramway sur la dalle couplée au sol

Ce chapitre est une ouverture sur la problématique de couplage d'une dalle de tramway avec le sol. Dans le but d'effectuer une étude vibratoire prédictive de l'implantation d'une nouvelle ligne tramway, il est nécessaire de connaître les efforts appliqués sur la dalle de tramway [Coquel(2007)]. On se propose ici de modéliser le problème inverse qui conduira à l'obtention de ces efforts. On montera notamment que le problème inverse est bien conditionné dans le cas d'un couplage sol-structure.

1 Généralités sur le problème inverse

Dans cette première partie, nous rappelons quelques notions de base des problèmes inverses [Leclerc(2012)]. Ce chapitre constituant en soi une ouverture de la problématique de couplage sol-structure, nous ne présenterons pas une étude exhaustive de la problématique des méthodes inverses mais nous nous limiterons à une première approche. L'objectif de ce chapitre est, entre autres, de montrer en quoi la modélisation semi-analytique du couplage plaque-sol offre un bon conditionnement du problème.

Dans les problématiques de problème inverse, il est bien connu que le bruitage de la mesure constitue l'une des grosses difficultés pour effectuer une identification acceptable des efforts. Ce bruitage induit de grosses perturbations lorsqu'il s'agit de reconstituer un effort notamment autour des fréquences de résonance de la structure.

1.1 Fonction de transfert d'une plaque découplée du sol en vibration de flexion

D'une façon générale, les problèmes inverses en vibration consistent, à partir de la connaissance du niveau d'accélération vibratoire mesuré, à déterminer l'origine de ce niveau vibratoire. L'origine de ces vibrations peut être diverse et nous considérons ici qu'il s'agit d'un effort ponctuel excitant une plaque mince en vibration de flexion. L'objectif consiste donc à déterminer l'amplitude et la phase des efforts à l'origine de la vibration de la structure.

La fonction de transfert du système étudié est la première information indispensable à connaître dans un problème inverse. Elle caractérise le système étudié indépendamment du type d'effort que l'on applique.

Considérons dans un premier temps une plaque en vibration de flexion non couplée au sol. Ce cas permet entre autres d'illustrer les problèmes classiques qu'il peut se poser lors d'un problème inverse. La fonction de transfert d'une plaque excitée par un effort j et mesurée au point i est donnée par :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{nm} \frac{\phi(x_i, y_i)\phi(x_j, y_j)}{M_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \quad (4.1)$$

avec $M_{nm} = \frac{\rho_p h_p S_p}{4}$ et $\omega_{nm} = D_p^* \left(\left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right)$ la masse généralisée et la pulsation propre du système pour le mode (n, m) respectivement.

Lorsque l'on cherche à identifier N efforts, il est nécessaire que le nombre de points de mesure soit plus grand ou égal au nombre d'efforts. Dans le cas contraire la solution n'est pas unique. En revanche, lorsque l'on considère plus de point de mesure que d'efforts appliqués, on peut s'attendre à réduire l'erreur sur les efforts à reconstituer.

Supposons que l'on cherche à identifier 2 efforts sur la structure. Comme cela va être présenté dans les sections suivantes, nous sommes amenés à calculer la matrice suivante :

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où l'on mesure en 2 points de la structure, (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , et l'on cherche à identifier 2 efforts (F_1, F_2) .

Le conditionnement de la matrice $H(\omega)$ nous donne une information sur la qualité de l'inversion et va fortement influencer l'inversion de $H(\omega)$. Le conditionnement d'une matrice est défini par le rapport des valeurs singulières extrêmes de la matrice :

$$\eta = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (4.3)$$

Lorsque ce nombre est faible la matrice est bien conditionnée et ce nombre est grand pour une matrice mal conditionnée. [Tarantola(2005)] Le mauvais conditionnement peut avoir plusieurs origines à savoir :

- La matrice est calculée au voisinage d'une fréquence de résonance de la structure. Ce cas devient notamment très problématique pour des structures peu amorties.
- Les points de mesure sont trop proches par rapport à la longueur d'onde de flexion de la structure.

Dans l'expression 4.1, on voit que le dénominateur peut s'annuler pour $\omega_{nm}^2 = \omega^2$. Notamment pour une structure non amortie, il s'agit d'un zéro strict qui entraîne que la fonction de transfert devient infinie. Dans ce cas l'inversion n'est plus possible. Cependant toutes les structures possèdent un amortissement interne ce qui entraîne que ω_{nm}^2 est un nombre complexe. Dès lors le dénominateur ne peut plus s'annuler. En revanche si l'amortissement est faible, la fonction de transfert peut prendre une valeur suffisamment élevée pour entraîner des problèmes d'inversion de la matrice $H(\omega)$. De même le fait d'avoir des mesures trop proches entraînera des fonctions de transfert potentiellement identiques. On se place dès lors dans le cas d'un problème à une équation pour deux inconnues et l'unicité de la solution n'est plus assurée.

Généralement ces problèmes se trouvent amplifiés par le bruitage de la mesure qui ne permet pas d'obtenir une inversion parfaite du système. Nous allons illustrer ces propos par des exemples dans les sections suivantes. Nous allons introduire avant cela la fonction de transfert de la structure couplée au sol.

1.2 Fonction de transfert d'une plaque couplée au sol

Par définition, la fonction de transfert est toujours définie de la même façon à savoir le rapport du déplacement sur la force. Dans le cas de la structure couplée, on calculera l'amplitude modale du déplacement de la structure couplée comme défini en 2.36. Ainsi la fonction de transfert $H_{ij}(\omega)$ fera référence au rapport du déplacement à la position (x_i, y_i) sur l'effort F_j .

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\sum_{nm} a_{nm} \phi_{nm}(x_i, y_i)}{F_j} \quad (4.4)$$

Dans le cas où le point de mesure n'est pas sur la structure mais à la surface du sol, on utilisera la définition du déplacement vibratoire à la surface du sol 2.43 et la fonction de transfert s'écrit donc :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{u_z(x_i, y_i, 0)}{F_j} \quad (4.5)$$

On rappelle que le couplage d'une structure avec le sol apporte beaucoup d'amortissement ajouté ce qui est à l'origine de la disparition des pics de résonance de la structure. La figure 4.1 correspond à la vitesse quadratique moyenne de la structure utilisée dans ce chapitre et dont on donne les caractéristiques de plaque et de sol dans la section suivante. Le fort amortissement ajouté par le sol que l'on peut observer sur cette courbe est à l'origine du bon conditionnement du problème inverse.

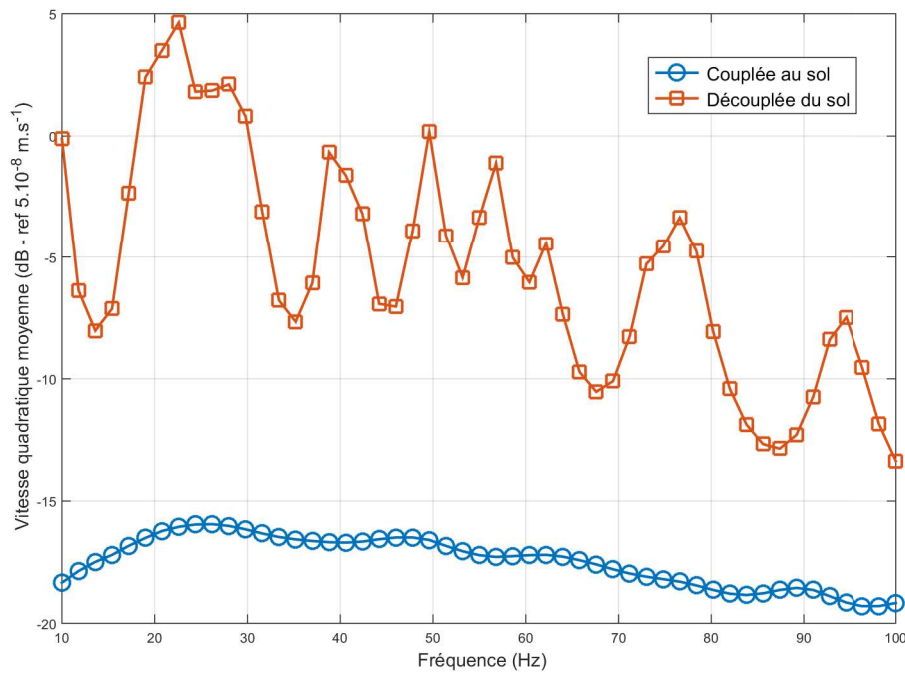


FIGURE 4.1 – Vitesse quadratique moyenne d'une dalle de tramway couplée et non couplée au sol

Dans les deux sections précédentes, nous avons introduit les fonctions de transfert que nous allons utiliser pour le problème inverse modélisé dans ce chapitre. La section suivante aborde les données mesurées et leur lien avec le modèle ci-dessus.

1.3 Analyse des signaux mesurés et construction du problème inverse

Généralement, on est amené à obtenir la donnée de l'accélération vibratoire d'une structure lorsque l'on effectue une mesure vibratoire. La donnée de ce signal est présentée ici ainsi que son lien avec les données du modèle à savoir la fonction de transfert.

1.3.1 Transformée de Fourier mesurée

La donnée que l'on mesure généralement sur une structure est l'accélération vibratoire. Cette mesure est faite simultanément en différents points de la structure. On se place ainsi dans le contexte d'une analyse spectrale multi-voies.

On effectue une simple transformée de Fourier du signal mesuré sur une seule fenêtre d'acquisition. On rappelle que la transformée de Fourier temporelle est définie par :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.6)$$

La figure 4.2 est un exemple d'évolution temporelle du niveau d'accélération vibratoire au passage d'un tramway. Bien que ce signal présente une évolution temporelle transitoire, la valeur RMS temporelle de ce signal est à peu près constante dans le temps comme le montre la figure 4.3. Cela justifie en partie l'approche de stationnarité du signal lors du passage de tramway.

Dans le cas présent, un passage de tramway complet dure environ 10 secondes et la fréquence d'échantillonnage est de 51200Hz. La résolution en fréquence suite à une FFT (Fast Fourier Transform) pour le signal de la figure 4.2 est de 0.1097Hz. Lors du calcul théorique de la fonction de transfert, il n'est pas envisageable d'avoir une telle résolution en raison d'un temps de calcul trop important. De plus cela n'apporterait pas d'information supplémentaire sur la fonction de transfert. Il est cependant nécessaire d'avoir la même résolution entre la fonction de transfert et le signal mesuré pour effectuer l'inversion par la suite. Une interpolation de la fonction de transfert est donc effectuée afin d'obtenir une résolution de 0.1097Hz.

On effectue donc une transformée de Fourier du signal de la figure 4.2 comme définie par la définition de la transformée de Fourier 4.6.

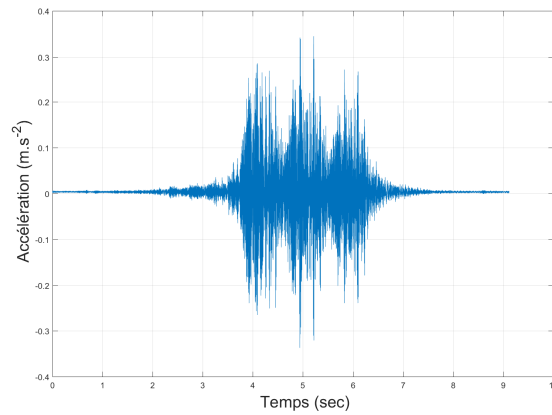


FIGURE 4.2 – Evolution temporelle de l'accélération vibratoire au passage d'un tramway à Angers

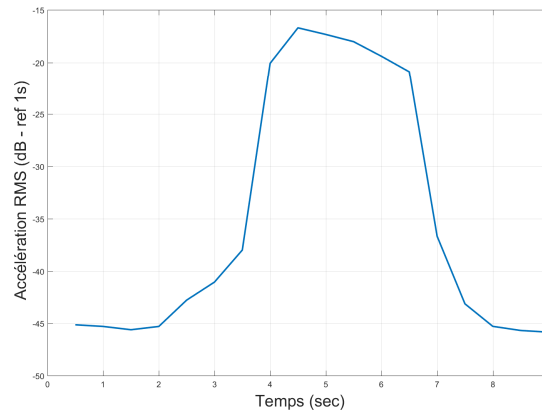


FIGURE 4.3 – Evolution temporelle RMS de l'accélération vibratoire au passage d'un tramway à Angers

1.3.2 Relation entre la fonction de transfert et transformée de Fourier mesurée

Nous avons vu dans les sections précédentes comment était obtenu le spectre du signal d'accélération vibratoire mesuré et la fonction de transfert. Il s'agit désormais de calculer l'effort appliqué par inversion de la fonction de transfert.

Rappelons que la fonction de transfert d'un système s'écrit comme suit :

$$\hat{x}_i(\omega) = \sum_j H_{ij}(\omega) \hat{f}_j(\omega) \quad (4.7)$$

En générale on cherche à identifier J efforts et l'on mesure I accélérations. Afin de pouvoir remonter aux J efforts, il est indispensable que $I \geq J$. Sous forme matricielle on écrira :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1J} \\ & \ddots & \\ H_{I1} & \cdots & H_{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_I \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

La matrice H n'étant pas nécessairement carrée, on multiplie à gauche par H^T afin d'obtenir une matrice $H^T H$ carrée inversible.

$$[H]^T \{\hat{X}(\omega)\} = [H]^T [H] \{F\} \quad (4.9)$$

Après inversion, on obtient finalement l'expression de l'effort complexe appliqué sur la structure :

$$\{F\} = ([H]^T [H])^{-1} [H]^T \{\hat{X}(\omega)\} \quad (4.10)$$

On verra que l'une des difficultés majeures réside dans le calcul de $([H]^T [H])^{-1} [H]^T$ qui se révèle très sensible au bruit de mesure. Dans le cas général que l'on présente ici où la matrice $[H]$ n'est pas nécessairement carrée, l'inversion conduit en réalité à trouver une solution au sens des moindres carrés. On trouve une solution en minimisant l'écart entre la mesure et le calcul.

Afin d'illustrer la brève introduction du problème inverse que nous venons de faire, nous allons étudier dans un premier temps la sensibilité du problème inverse dans un cas couplé et non couplé au sol.

1.4 Sensibilité du problème inverse aux erreurs de mesure

Afin d'étudier la sensibilité du problème inverse, deux cas vont être présentés à savoir le cas d'une plaque couplée au sol ou non couplée au sol. La plaque que l'on considère est en béton et possède les dimensions d'une dalle de tramway à savoir $L_x = 28m$, $L_y = 6.6m$ et $h_p = 0.6m$. Les caractéristiques du sol utilisées dans le cas de la dalle couplée au sol sont les suivantes :

Sol	C_s	C_p	η_s	η_p	ρ	Epaisseur
Couche 1	160	600	0.02	0.02	1200	∞

TABLE 4.1 – Caractéristiques mécaniques et géométrique du sol monocouche

On cherche à identifier 5 efforts excitants la structure aux points $(\frac{L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{2L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{3L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{4L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$ et $(\frac{5L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$. Les efforts que l'on cherche à reconstituer sont les suivants :

$$\begin{cases} F_1 = 1000e^{j\pi} \\ F_1 = 200e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ F_1 = 400e^{-j\frac{\pi}{8}} \\ F_1 = 200e^{j\frac{\pi}{16}} \\ F_1 = 200e^{-j\frac{\pi}{12}} \end{cases} \quad (4.11)$$

1.5 Bruitage artificiel pour l'étude de la sensibilité

Dans un premier temps, le problème direct nous permet d'obtenir l'accélération en cinq points localisés en $(5m, 5m)$, $(10m, 5m)$, $(15m, 5m)$, $(20m, 5m)$ et $(25m, 5m)$ issues des cinq efforts donnés ci-dessus. Ces accélérations vibratoires vont être bruitées afin de représenter la sensibilité du problème. Ainsi on applique à chaque accélération vibratoire le bruitage suivant :

$$\begin{cases} a_{1bruite} = 1.2|a_1|e^{jangle(a_1)0.94} \\ a_{2bruite} = 0.96|a_2|e^{jangle(a_2)1.05} \\ a_{3bruite} = 1.2|a_3|e^{jangle(a_3)0.94} \\ a_{4bruite} = 0.96|a_4|e^{jangle(a_4)1.05} \\ a_{5bruite} = 1.2|a_5|e^{jangle(a_5)0.94} \end{cases} \quad (4.12)$$

La figure 4.4 montre l'effet du bruitage sur le niveau d'accélération vibratoire du point de mesure 1 situé en $(5m, 5m)$. On voit que le bruitage entraîne un décalage de environ 2dB sur l'amplitude du niveau vibratoire dans le cas d'une plaque couplée avec le sol comme dans le cas d'une plaque non couplée. Le rapport signal sur bruit SNR est défini comme le rapport de la puissance du signal mesuré sur la puissance du bruit mesuré.

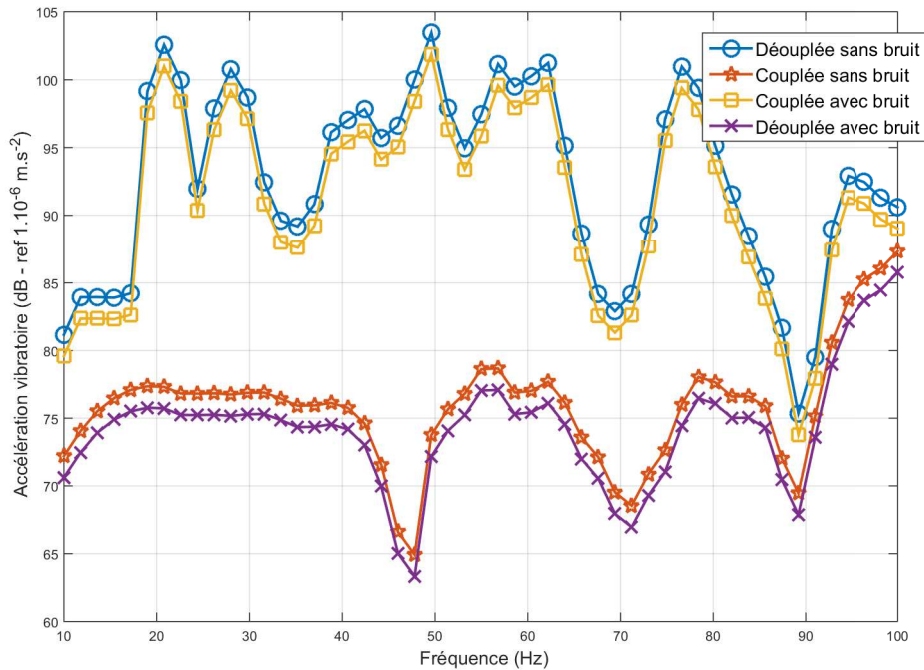


FIGURE 4.4 – Bruitage de l'accélération vibratoire du point de mesure 1 d'une plaque couplée et déouplée du sol

La donnée des cinq niveaux d'accélérations bruitées va être utilisée comme résultat d'une mesure d'accélération. Nous allons maintenant observer la reconstitution de l'effort appliqué avec ces données d'accélération.

1.5.1 Comparaison de la sensibilité d'une plaque couplée et non couplée

Les figures 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 correspondent aux amplitudes des efforts appliqués dans le cas d'un couplage et en absence de couplage avec le sol. La droite rouge correspond à l'amplitude de l'effort appliqué réel. On observe une forte sensibilité du bruitage dans le cas de la plaque non couplée par rapport à la plaque couplée. En effet la fluctuation de l'effort autour de l'effort réel reste inférieure à 5dB dans le cas couplée avec le sol. En revanche dans le cas non couplée avec le sol, les écarts sont très importants de l'ordre de 20dB.

Sans vouloir en faire une étude exhaustive, ces courbes montrent que le couplage a un effet "bénéfique" dans la reconstitution des efforts. L'une des origines de la forte sensibilité au bruit provient de l'annulation du dénominateur de la fonction de transfert dans le cas découplé du sol c'est-à-dire aux fréquences de résonance de la structure. Ce phénomène est d'autant plus marqué pour des structures peu amorties car la partie imaginaire du dénominateur est très faible. En revanche dans le cas d'un couplage avec le sol, il a été montré dans les parties précédentes que l'amortissement ajouté par le sol sur la structure est très important. En conséquence, la fonction de transfert ne tend pas vers l'infini aux fréquences de résonance à l'origine du mauvais conditionnement de la matrice $H(\omega)$.

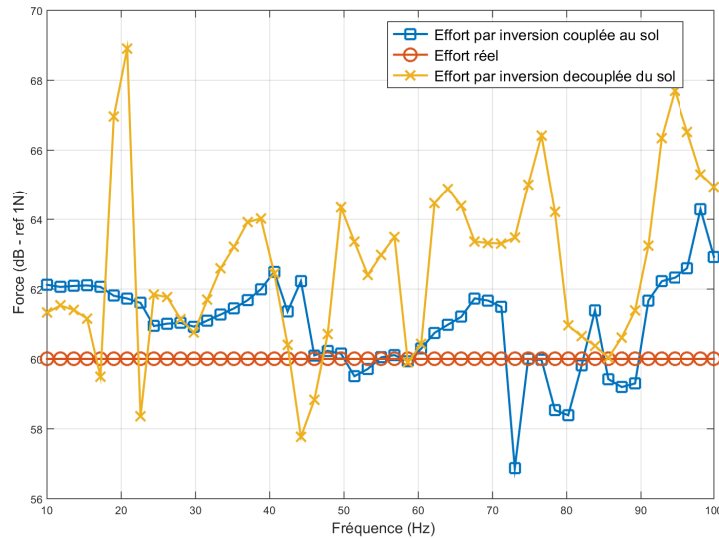


FIGURE 4.5 – Effort 1 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

Nous allons maintenant étudier la sensibilité du problème inverse entre une mesure sur dalle couplée au sol et une mesure à la surface du sol.

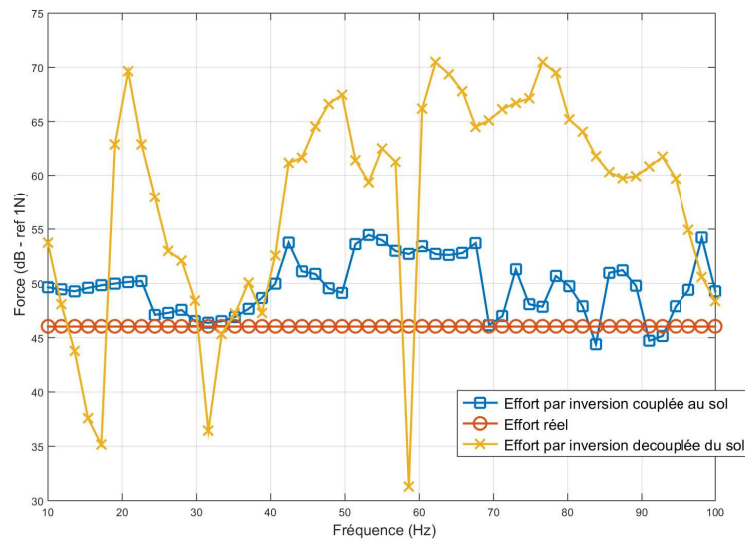


FIGURE 4.6 – Effort 2 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

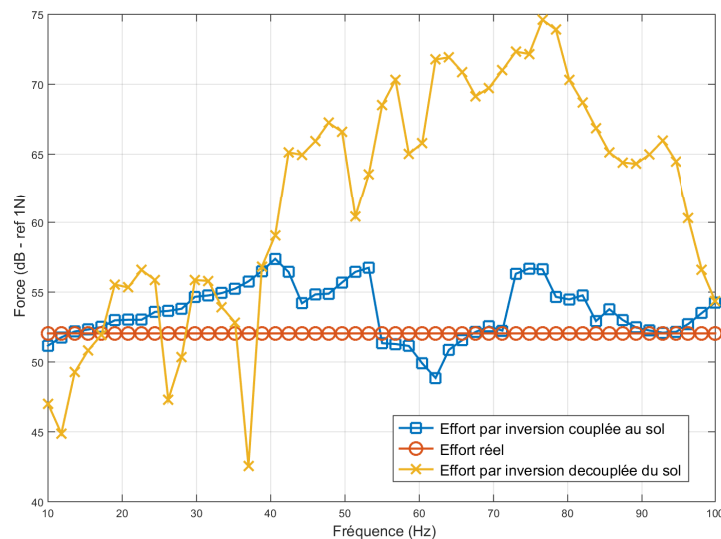


FIGURE 4.7 – Effort 3 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

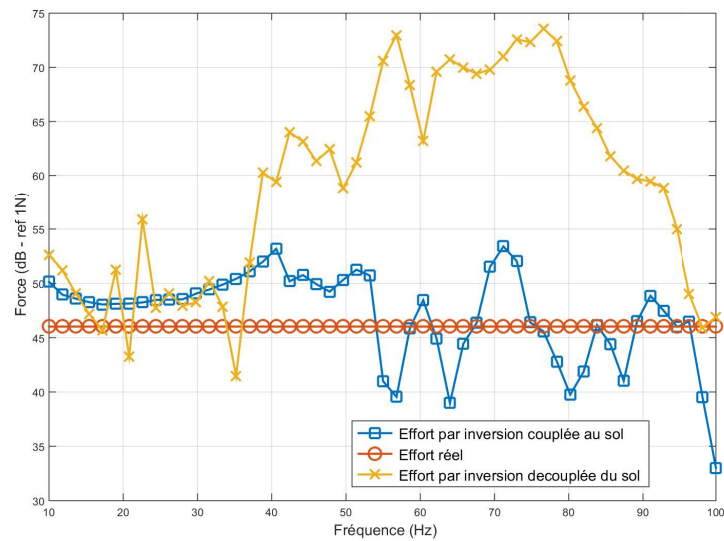


FIGURE 4.8 – Effort 4 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

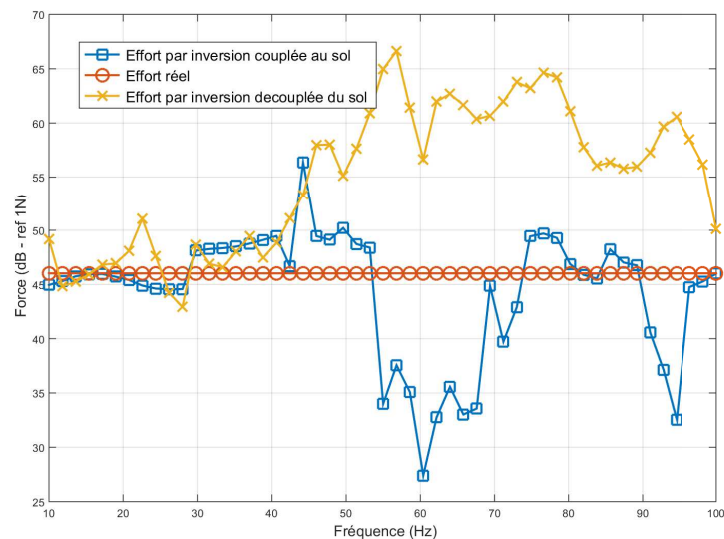


FIGURE 4.9 – Effort 5 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

1.5.2 Comparaison de la sensibilité du problème inverse entre une mesure sur dalle et à la surface du sol

Il a été montré que le couplage d'une dalle avec le sol permet une régularisation du problème dans le sens où le fort amortissement ajouté par le sol sur la dalle évite à la fonction de transfert de prendre des valeurs très extrêmes. Dans l'optique de remonter aux efforts équivalents appliqués par un passage de tramway, on effectuera les mesures vibratoires à la surface du sol. On présente donc brièvement l'influence du bruitage de la mesure entre une mesure sur dalle couplée au sol et une mesure à la surface du sol.

Le bruitage sera identique au cas de la section précédente cependant il faut rappeler que d'un point de vue pratique le rapport signal sur bruit d'une mesure à la surface du sol est plus important que celui sur la structure. Les résultats présentés sont donc des résultats sortant d'un contexte réel de mesure mais intéressant à connaître tout de même.

Les mesures sur la structure ont été faites aux points $(5m, 5m)$, $(10m, 5m)$, $(15m, 5m)$, $(20m, 5m)$ et $(25m, 5m)$ tandis que les mesures à la surface du sol se situent aux points $(5m, -2m)$, $(10m, -2m)$, $(15m, -2m)$, $(20m, -2m)$ et $(25m, -2m)$. Les figures 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 correspondent aux efforts 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement appliqués sur la dalle de tramway et issus du problème inverse. On observe une meilleure reconstitution de l'amplitude de l'effort lorsque le point de mesure se situe à la surface du sol. Le phénomène est identique au cas précédent dans le sens où la fonction de transfert est extrêmement amortie par la présence du sol ce qui n'entraîne pas de brusque fluctuation de celle-ci même au voisinage de résonance. En conséquence le bruitage de la mesure est moins influencé à la surface du sol que sur la structure.

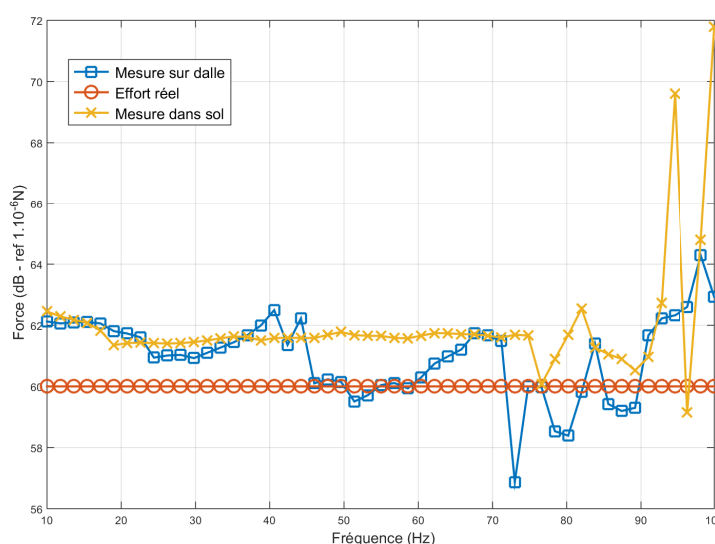


FIGURE 4.10 – Effort 1 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

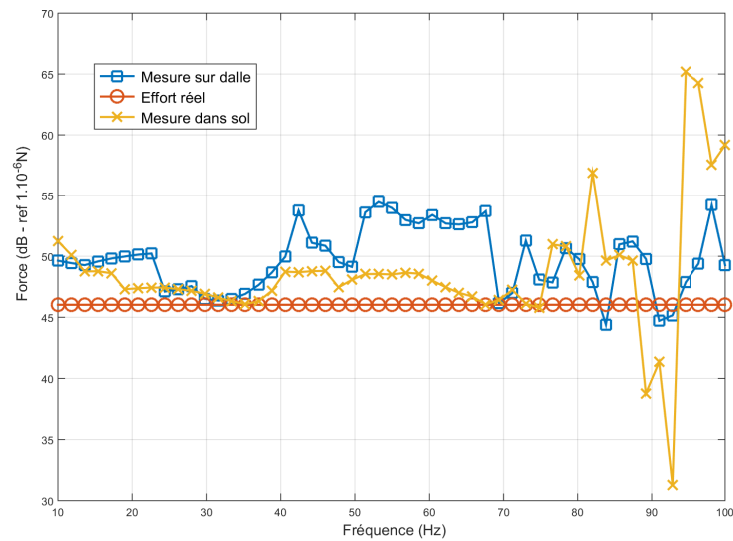


FIGURE 4.11 – Effort 2 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

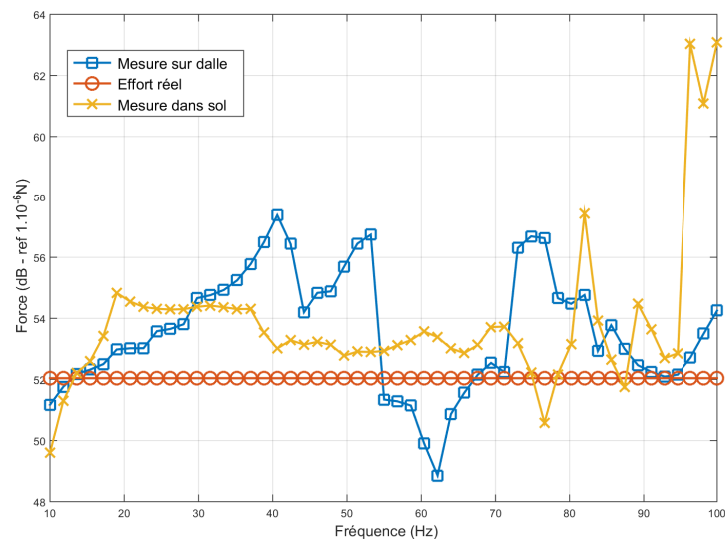


FIGURE 4.12 – Effort 3 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

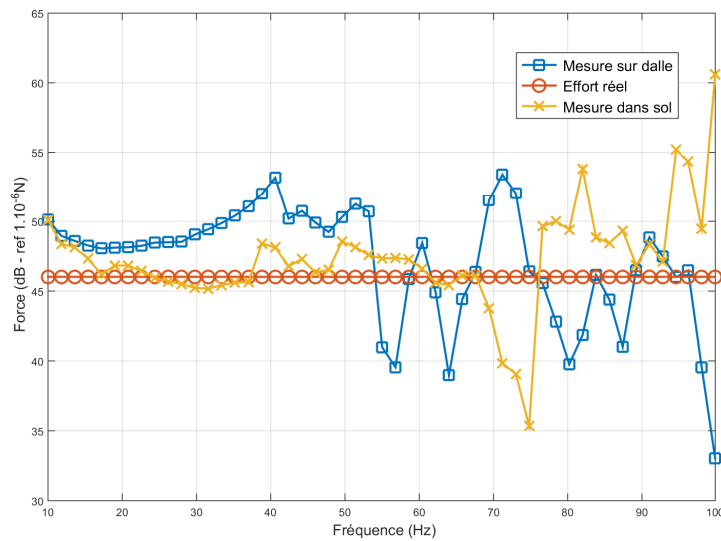


FIGURE 4.13 – Effort 4 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

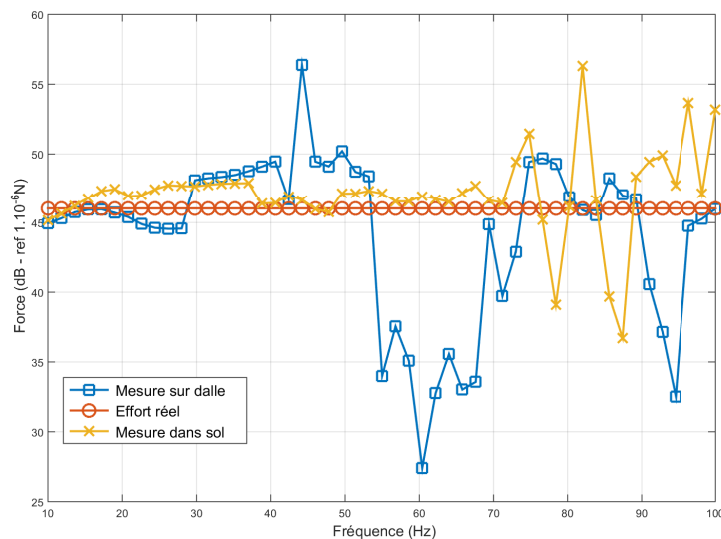


FIGURE 4.14 – Effort 5 appliqué sur la dalle de tramway après reconstitution suite au bruitage de l'accélération

Ces résultats sont originaux puisque en général, on considère que s'éloigner de la source contribue à une détérioration de la reconstitution du problème inverse or dans le cas présent on montre que c'est l'effet inverse qu'il se produit.

Gardons toujours en tête que le bruitage devrait être considéré comme plus important à la surface du sol que sur la structure si l'on désire effectuer une étude de sensibilité précise et plus proche de la réalité.

On se limitera à cette première étude de sensibilité qui permet de donner des tendances pour une étude plus exhaustive de la sensibilité du problème inverse d'une structure couplée avec le sol. On présente maintenant l'objectif principal du problème inverse à savoir la détermination des efforts appliqués sur la dalle de tramway par un passage de tramway.

2 Cas pratique d'efforts équivalents au passage d'un tramway

Dans cette section, nous allons effectuer un problème inverse afin de déterminer cinq efforts équivalents excitant la structure au passage du tramway. Bien que le tramway constitue une charge roulante, on approxime cette charge par des efforts ponctuels. On calculera ces efforts ponctuels équivalents au passage de plusieurs tramways et sur deux voies différentes. Afin d'avoir une idée de la pertinence des efforts trouvés, on comparera les données expérimentales et théoriques sur une décroissance perpendiculairement à la voie.

Insistons tout d'abord sur la notion de force équivalente. L'effort réellement appliqué sur la dalle de tramway est une charge roulante donc l'un des premiers paramètres de cet effort est la vitesse du tramway. Cette charge roulante circule sur des rails eux-mêmes couplés à la dalle de tramway. Dans la mesure où l'on cherche à approximer un effort mobile par des efforts ponctuels, il serait judicieux d'avoir un nombre important d'efforts ponctuels tous alignés le long du rail. Deux problèmes majeurs se posent à ce type de représentation. Le premier est un problème matériel dans le sens où le nombre de capteurs doit au minimum être égal au nombre d'efforts. D'un point de vue pratique il n'a pas été envisageable de mettre plus de 5 capteurs au moment de la réalisation des mesures. Le second problème concerne le conditionnement du problème. Comme il a été dit précédemment deux efforts trop proches peuvent entraîner des difficultés dans la reconstitution des efforts. Ainsi un compromis doit être choisi pour le nombre d'effort à reconstituer. Dans notre cas d'étude, cinq efforts équivalents ont été utilisés pour des questions de nombre de points de mesure. Finalement, on garde à l'esprit que le sens de l'effort équivalent ici consiste à rassembler un très grand nombre de paramètres à l'origine de l'excitation de la structure.

2.1 Conditions expérimentales

Le site utilisé pour caractériser les efforts appliqués par un passage de tramway sur une dalle de béton est le tramway d'Angers. La photo 4.15 donne une vue d'ensemble du site en question. La dalle de tramway que l'on considère possède les caractéristiques mécaniques suivantes : $E_p = 2.5 * 10^{10} Pa$, $\rho_p = 2500 Kg.m^{-3}$

$\nu_p = 0.3$, $\eta_p = 0.05$. La longueur de la dalle est de $28m$ de long, $6.6m$ de large et $h_p = 0.6m$ d'épaisseur. Deux voies de circulation se situent sur la dalle référencée par "voie 1" et "voie 2". La figure 4.16 correspond à une vue de dessus du site.



FIGURE 4.15 – Site de mesure des niveau d'accélération le long du tramway

Les caractéristiques mécaniques et géométriques du sol ont été obtenues grâce à la méthode MASW effectuée dans une zone proche de la dalle de tramway. On obtient les caractéristiques listées dans le tableau suivant :

Sol	C_s	C_p	η_p	η_s	ρ	Epaisseur
Couche 1	250	500	0.05	0.05	1200	5
Couche 1	550	1000	0.05	0.05	1500	∞

TABLE 4.2 – Caractéristiques mécaniques et géométrique du sol suite à une mesure MASW

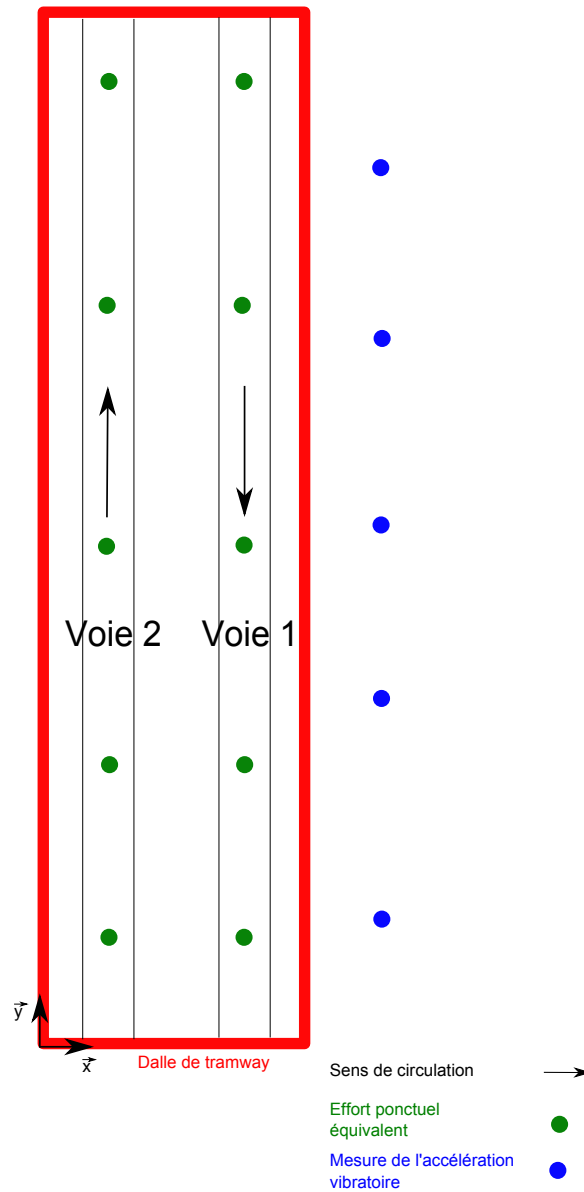


FIGURE 4.16 – Vue de dessus de la voie 1 et 2 du tramway d'Angers

2.2 Calcul des efforts équivalents appliqués

On cherche à identifier 5 efforts équivalents localisés aux points $(\frac{L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{2L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{3L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$, $(\frac{4L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$ et $(\frac{5L_x}{6}m, \frac{L_y}{4}m)$ pour la voie 1. La figure 4.16 est une vue d'ensemble du problème où les points verts sont les efforts à identifier sur la voie 1 ou sur la voie 2. Les points bleus sont les points de mesure d'accélération à la surface du sol situés en $(5m, -2m)$, $(10m, -2m)$, $(15m, -2m)$, $(20m, -2m)$ et $(25m, -2m)$. Les points de mesure de l'accélération vibratoire se situent toujours à la surface du sol le long de la dalle de tramway. Seule la localisation des efforts à reconstituer change suivant que l'on se situe sur la voie 1 ou 2. En revanche le nombre de points d'efforts ne changera pas et il sera toujours au nombre de 5.

Les efforts équivalents que l'on détermine peuvent être très dispersés car il existe un grand nombre de paramètres difficiles à évaluer. L'un de ces paramètres influençant fortement les efforts appliqués est la rugosité relative roue-rail. Il peut d'ailleurs être noté que quelque que soit le modèle d'effort utilisé (par méthode directe ou méthode inverse) [Sheng et al.(1999)Sheng, Jones, and Petyt], les efforts appliqués seront toujours une donnée approchée dans le sens où la rugosité varie d'un tramway à l'autre.

Dans le cas présent la vitesse du tramway est constante et est d'environ 50km/h.

2.2.1 Efforts appliqués sur la voie 1

Deux passages de tramway sur la voie 1 ont été mesurés. La reconstitution des efforts appliqués par le premier tramway est donnée sur la figure 4.17 en bande de tiers d'octave. On observe une tendance identique entre les efforts appliqués avec des émergences vibratoires à 16Hz et 40Hz. Le premier pic correspond probablement au résonance du tramway notamment du système roue-bogie-caisse. En effet ces fréquences se situent généralement à très basse fréquence entre 2Hz et 20Hz. En ce qui concerne l'émergence à 40Hz, il est probable qu'il s'agisse d'une résonance du système roue-rail qui se situe en général autour de 50Hz.

Les figures 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22 correspondent aux amplitudes des efforts 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement appliqués sur la dalle de tramway pour le tramway 1 et le tramway 2 circulant sur la voie 1. On observe toujours une émergence du niveau vibratoire à 16Hz et 40Hz cependant il existe une disparité qui peut s'avérer importante entre le tramway 1 et 2 qui s'explique entre autre par des rugosités roue-rail différentes et un poids de la caisse différent. Les niveaux vibratoires sont de l'ordre de 20dB à 40dB.

Cette première étude a permis de remonter aux efforts équivalents appliqués sur la dalle de tramway. On voit apparaître des fréquences de résonance correspondant à des caractéristiques du système tramway-rail. On mesure désormais les efforts appliqués sur la voie 2.

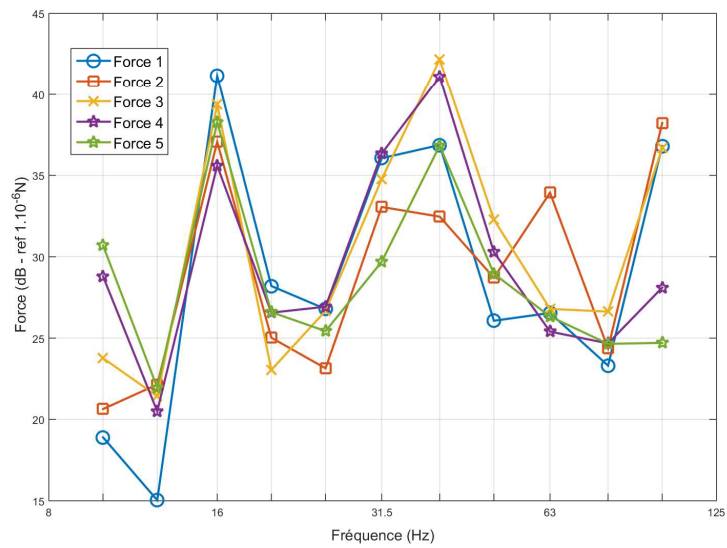


FIGURE 4.17 – Efforts équivalents obtenus au passage d'un tramway sur la voie 1

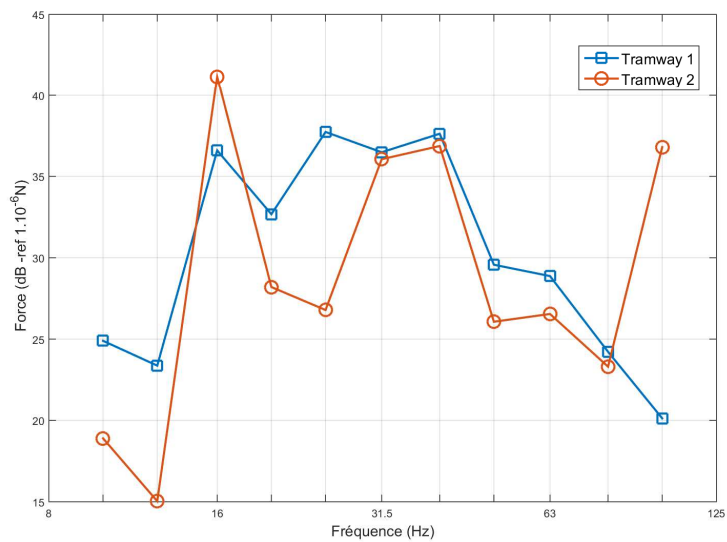


FIGURE 4.18 – Comparaison de l'effort équivalent 1 pour deux tramways passant sur la voie 1

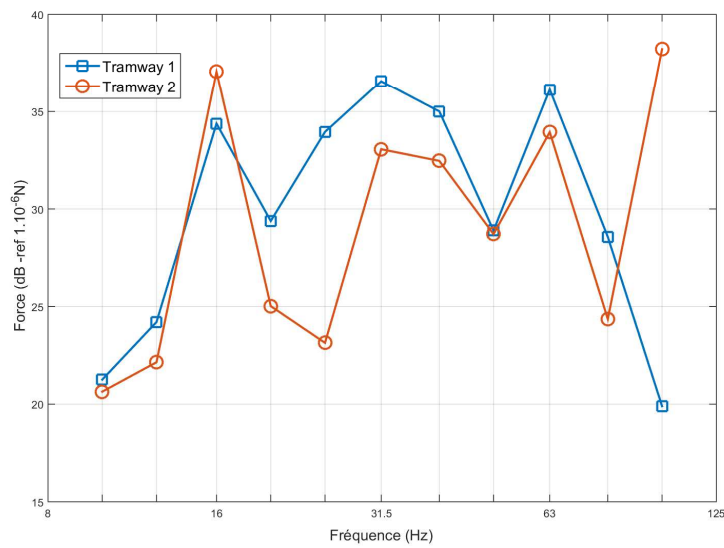


FIGURE 4.19 – Comparaison de l'effort équivalent 2 pour deux tramways passant sur la voie 1

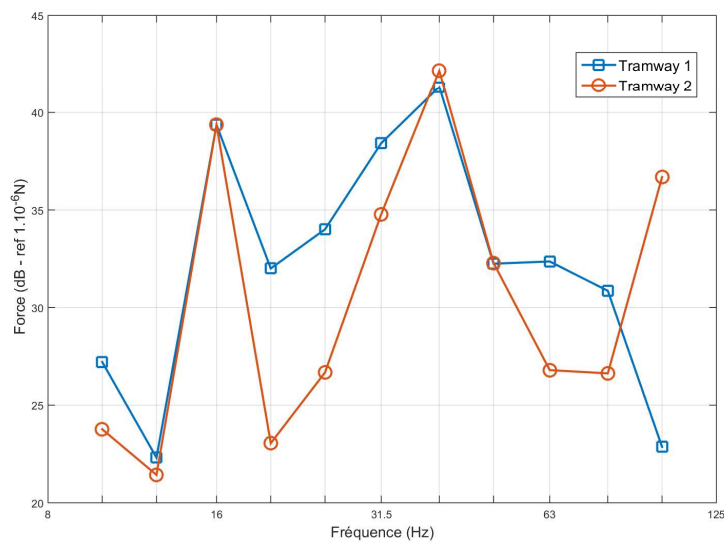


FIGURE 4.20 – Comparaison de l'effort équivalent 3 pour deux tramways passant sur la voie 1

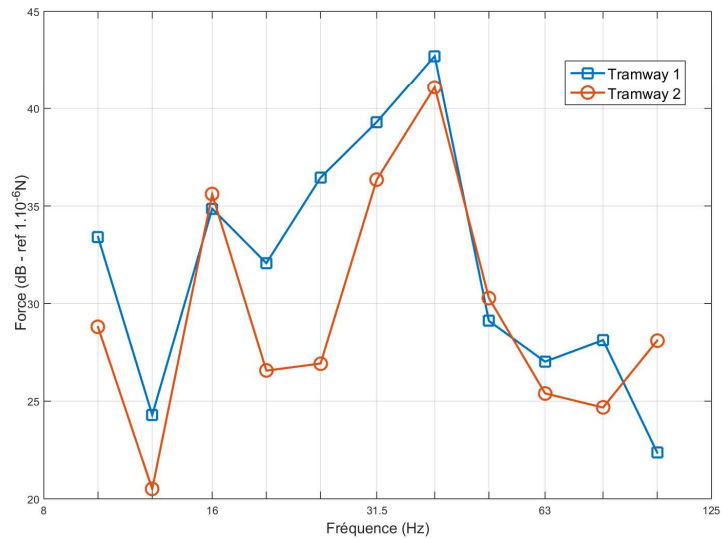


FIGURE 4.21 – Comparaison de l'effort équivalent 4 pour deux tramways passant sur la voie 1

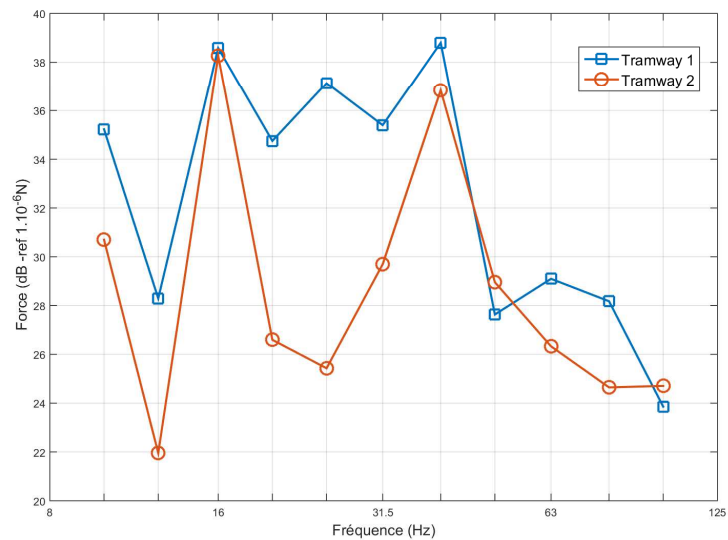


FIGURE 4.22 – Comparaison de l'effort équivalent 5 pour deux tramways passant sur la voie 1

2.2.2 Efforts appliqués sur la voie 2

On effectue le problème inverse pour le cas de la voie 2. Les points de mesure se situent toujours aux mêmes points cependant on reconstitue des efforts aux points $(\frac{L_x}{6}m, \frac{3L_y}{4}m)$, $(\frac{2L_x}{6}m, \frac{3L_y}{4}m)$, $(\frac{3L_x}{6}m, \frac{3L_y}{4}m)$, $(\frac{4L_x}{6}m, \frac{3L_y}{4}m)$ et $(\frac{5L_x}{6}m, \frac{3L_y}{4}m)$. La figure 4.23 correspond aux 5 efforts appliqués sur la dalle de tramway au passage du tramway 1. On observe toujours une émergence de l'effort appliqué à 16Hz cependant il existe également une émergence à 31.5Hz et à 63Hz.

On peut associer ces émergences aux caractéristiques de la charge roulante et de l'interaction roue-rail.

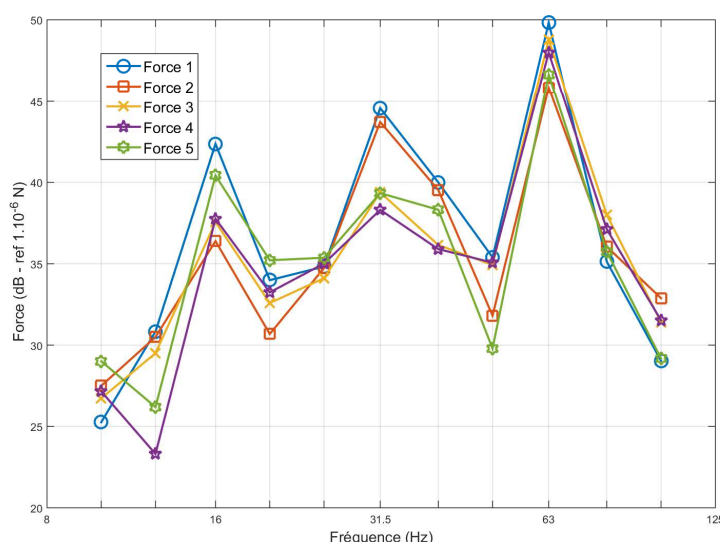


FIGURE 4.23 – Efforts équivalents obtenus au passage d'un tramway sur la voie 2

Les figures 4.24, 4.25, 4.26, 4.27 et 4.28 correspondent aux amplitudes des efforts 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement appliqués sur la dalle de tramway pour le tramway 1, 2 et 3 circulant sur la voie 2. On voit en effet que les niveaux à 16Hz, 31.5Hz et 63Hz sont plus ou moins importants traduisant un réel effet de disparité déjà bien connu entre les matériels roulants.

La donnée de ces efforts équivalents issue de mesure au passage de tramway met déjà en avant que tout tramway circulant sur une voie possède des caractéristiques qui lui sont propres et qu'il est extrêmement délicat d'être capable de les prédire à l'avance. En effet même dans un problème direct où l'on connaît bien les données du tramway et des rails, il existe un certain nombre de paramètres comme la rugosité relative roue-rail qu'il est délicat de prédire à l'avance. La détermination des efforts équivalents obtenus ici est faite pour des tramways identiques sur la même dalle de tramway. On constate cependant des disparités importantes résultant principalement de l'interaction roue-rail. Cependant sur un grand nombre d'échantillons il serait envisageable de donner des gabarits d'efforts équivalents appliqués sur la dalle de tramway moyennés et possédant un certain écart-type.

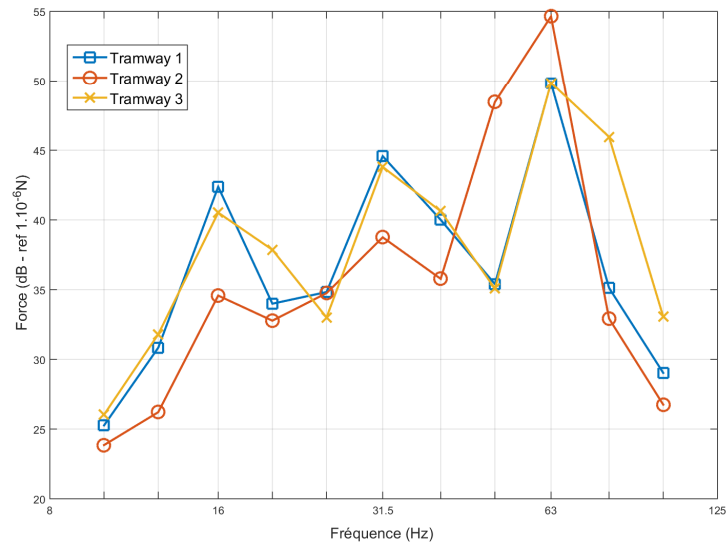


FIGURE 4.24 – Comparaison de l'effort équivalent 1 pour trois tramways passant sur la voie 2

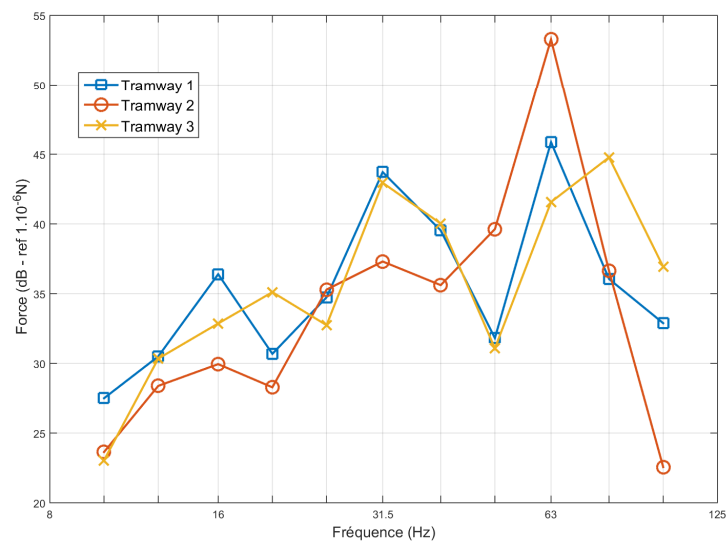


FIGURE 4.25 – Comparaison de l'effort équivalent 2 pour trois tramways passant sur la voie 2

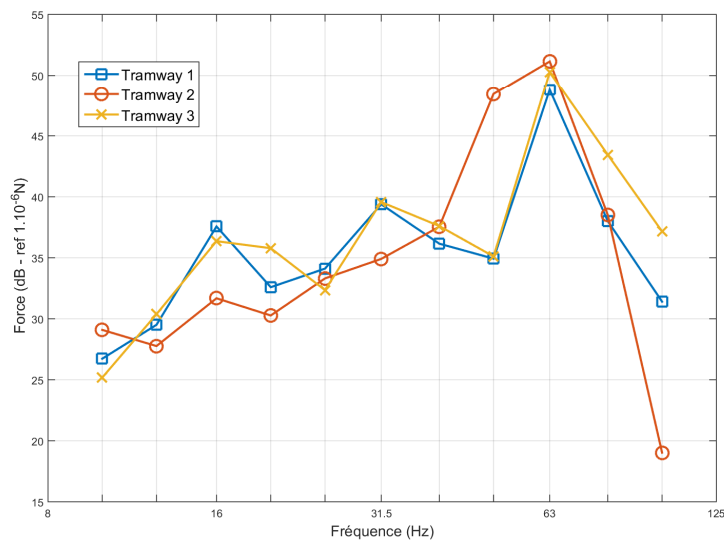


FIGURE 4.26 – Comparaison de l'effort équivalent 3 pour trois tramways passant sur la voie 2

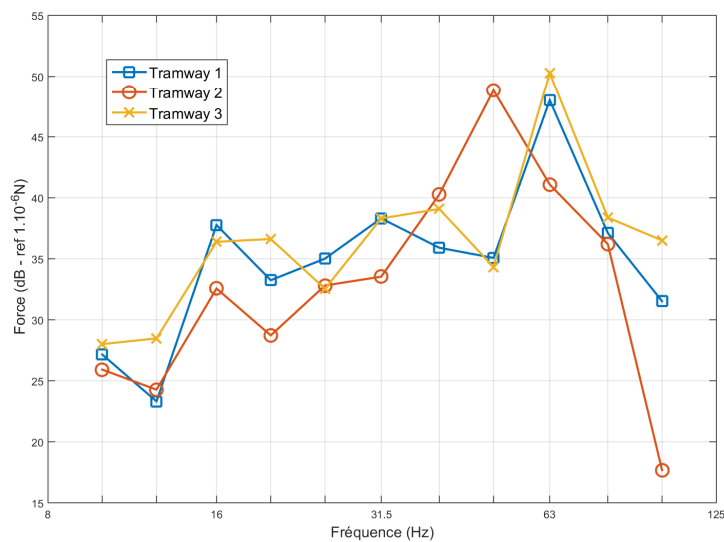


FIGURE 4.27 – Comparaison de l'effort équivalent 4 pour trois tramways passant sur la voie 2

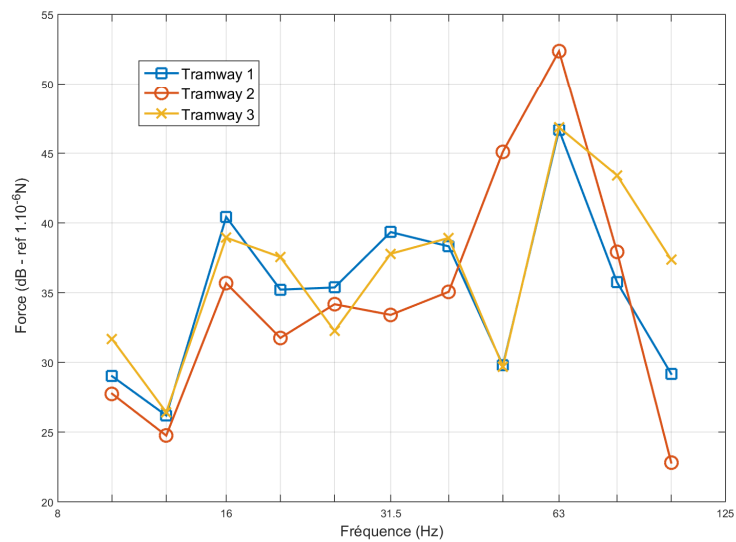


FIGURE 4.28 – Comparaison de l'effort équivalent 5 pour trois tramways passant sur la voie 2

2.3 Sur la pertinence des efforts équivalents reconstitués : Décroissance au passage d'un tramway avec efforts équivalents

Les résultats des efforts équivalents obtenus ci-dessus nous permettent désormais de renseigner le modèle de couplage sol-structure avec des efforts de tramway réels. Cependant les efforts présentés ci-dessus étant le résultat d'une étude préliminaire, ils n'ont pas été comparés à ceux obtenus par calcul direct prenant en compte la charge roulante et l'interaction roue-rail. Afin d'avoir une idée de la pertinence des efforts obtenus ci-dessus, nous avons appliqué ces efforts dans un problème direct et déterminé le niveau vibratoire en différents points à la surface du sol, à savoir 2m, 4m, 8m, 16m et 20m de la dalle centrée sur la longueur de la dalle. La figure 4.29 donne une vue de dessus du problème considéré. On considère les 5 efforts obtenus lors du passage du tramway 1 comme efforts appliqués sur la structure. Il n'a pas été possible durant ces mesures d'effectuer simultanément la mesure le long de la dalle et la mesure en décroissance donc les niveaux vibratoires issus de la décroissance ne correspondent pas au même tramway que ceux issus du problème inverse.

Les figures 4.30, 4.31, 4.32, 4.33 et 4.34 correspondent à la comparaison des niveaux vibratoires à 2m, 4m, 8m, 16m et 20m de la dalle respectivement issus de la mesure au passage du tramway et issus du modèle avec efforts équivalents reconstitués. Même si le tramway n'est pas identique, on observe une assez bonne comparaison théorie-expérience en tendance. En effet jusqu'à la bande d'octave 31.5Hz, les écarts ne dépassent pas 5dB cependant après 31.5Hz des écarts notables peuvent être identifiés de l'ordre de 10dB. On peut penser qu'en montant en fréquence le donnée de cinq efforts n'est pas suffisante pour reconstituer l'effort total généré par un passage de tramway.

Bien que l'on puisse noter des écarts parfois importants entre la mesure et la simulation, l'ordre de grandeur et la tendance des niveaux vibratoires sont acceptables pour penser que les efforts appliqués reconstitués sont corrects. Une seconde campagne de mesure doit cependant être menée en effectuant la mesure simultanée du niveau vibratoire le long de la dalle de tramway et en décroissance perpendiculairement à la voie. De plus une mesure avec 10 points de mesure le long de la voie pourrait être envisagée afin de reconstituer 10 efforts équivalents probablement nécessaire en montant en fréquence.

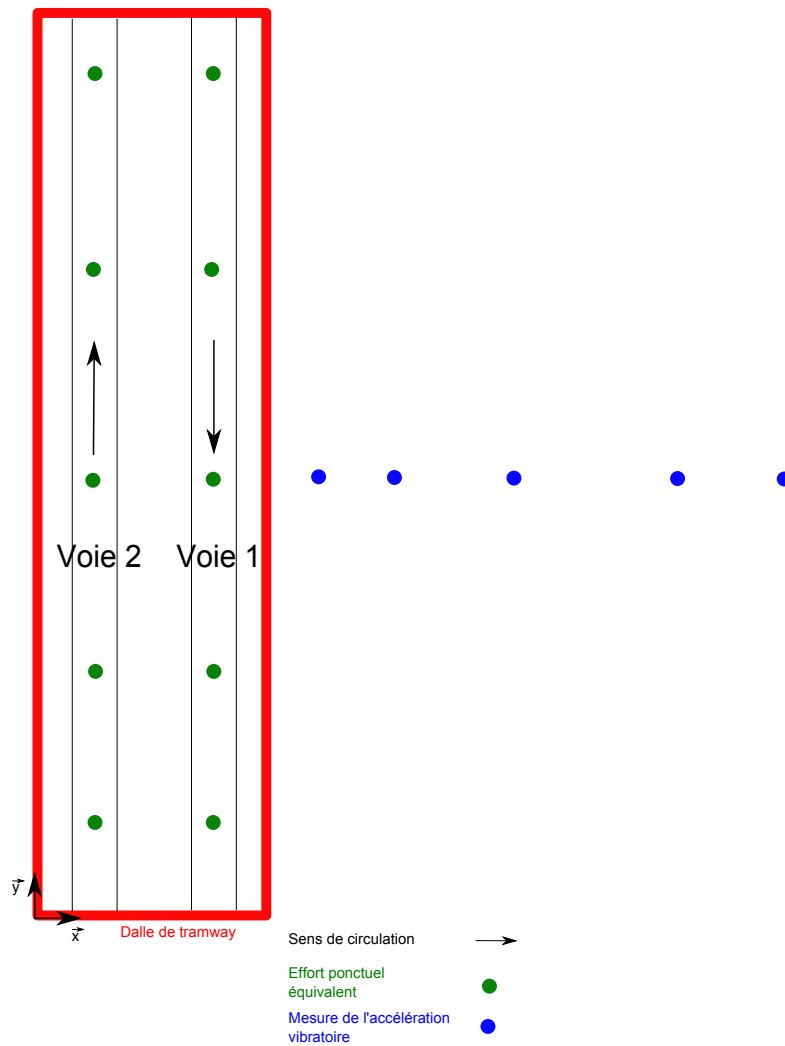


FIGURE 4.29 – Vue de dessus de la voie 1 et 2 du tramway d'Angers

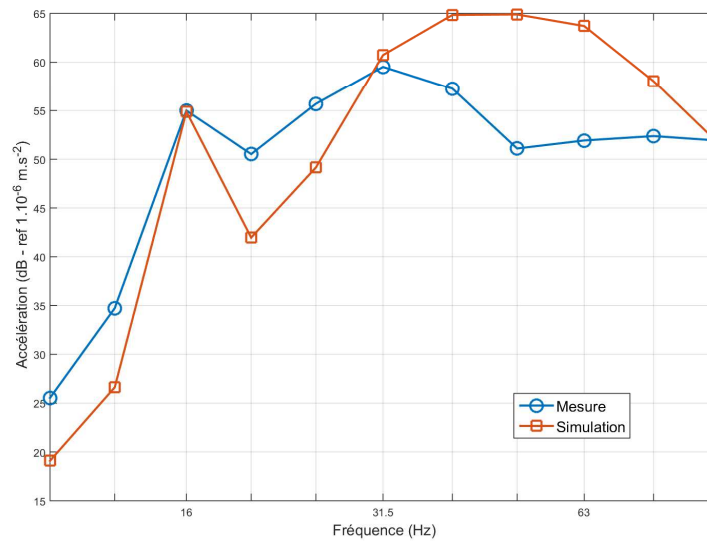


FIGURE 4.30 – Niveau d'accélération vibratoire à 2m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1

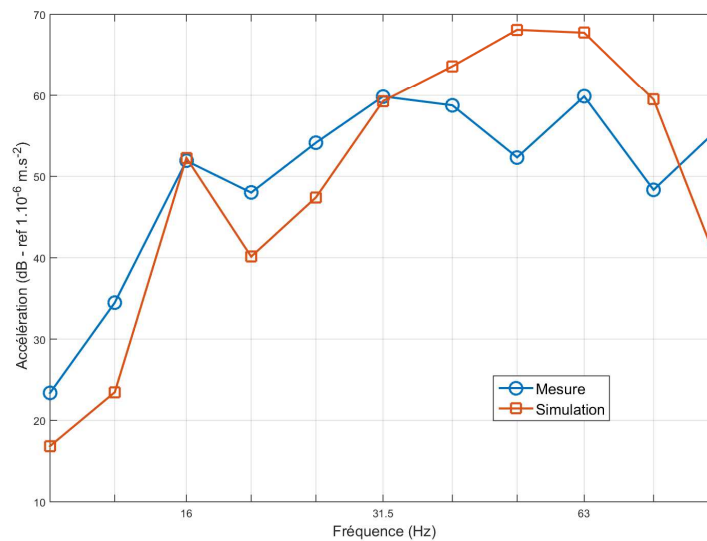


FIGURE 4.31 – Niveau d'accélération vibratoire à 4m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1

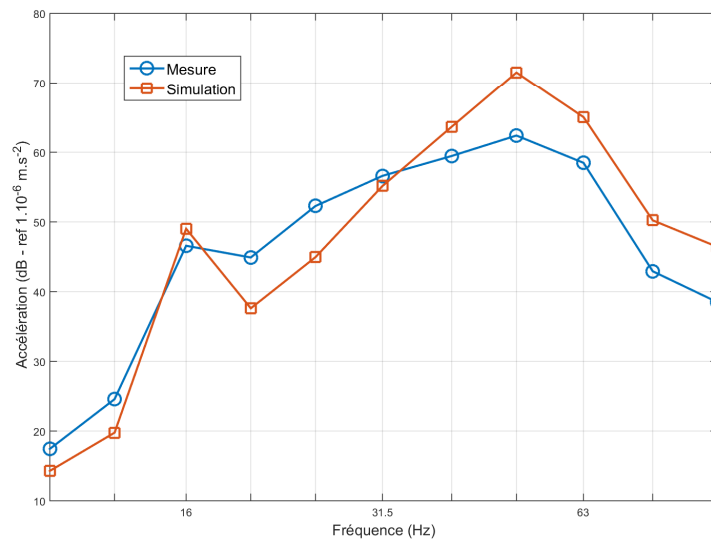


FIGURE 4.32 – Niveau d'accélération vibratoire à 8m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1

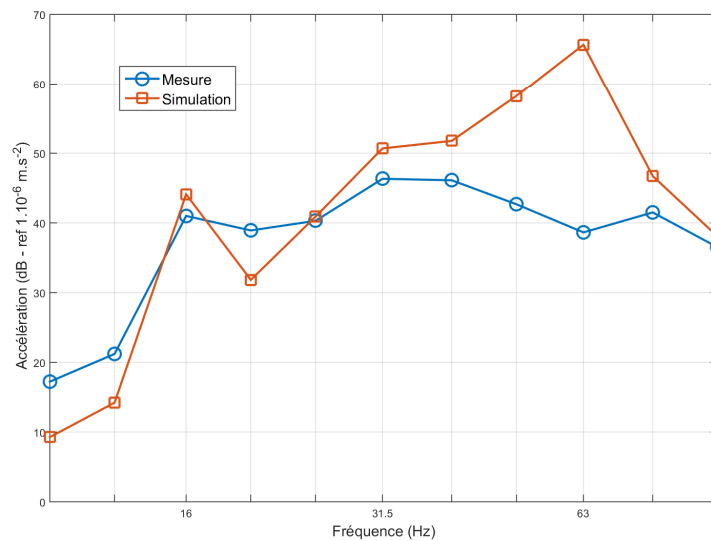


FIGURE 4.33 – Niveau d'accélération vibratoire à 16m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1

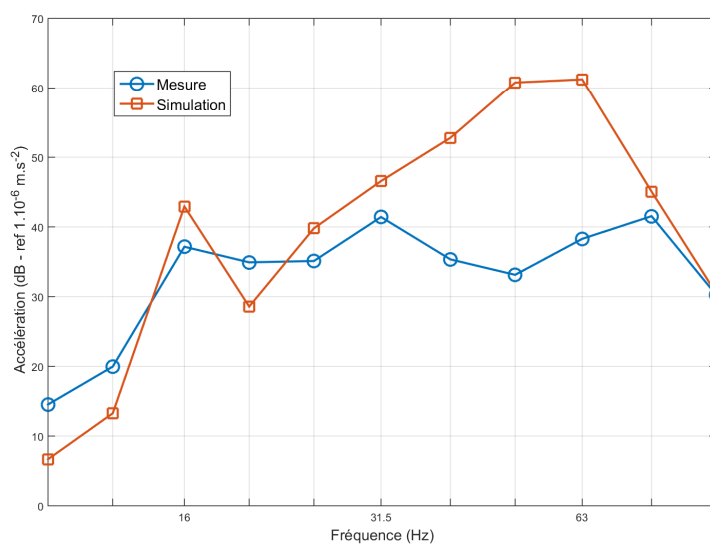


FIGURE 4.34 – Niveau d'accélération vibratoire à 20m de la dalle au passage d'un tramway sur la voie 1

3 Conclusion

Ce dernier chapitre d'ouverture de la problématique de couplage sol-structure laisse présager qu'il est non seulement possible de remonter aux efforts appliqués mais que le problème est bien mieux conditionné qu'un problème inverse classique. Les efforts reconstitués montrent une certaine cohérence en terme de niveaux vibratoires ainsi qu'en terme de résonance. A notre connaissance cette reconstitution dans un contexte ferroviaire est nouvelle et n'a pas fait l'objet de publication internationale.

Il reste cependant un travail important à faire dans ce domaine et les résultats présentés ici ne restent que des résultats préliminaires.

Conclusion

Ce travail de thèse a présenté le couplage d'une dalle en vibration de flexion avec un sol stratifié. Cette catégorie de problème du couplage sol-structure est d'un grand intérêt dans le cas de l'étude d'impact de l'implantation d'un tramway à proximité des habitations. La résolution de ce problème est effectuée par des méthodes semi-analytiques faisant intervenir des transformées de Fourier spatiales. Les techniques de résolution des problème de couplage entre un milieu extérieur et une structure utilisées ici sont issues de l'acoustique. Il est donc possible d'aborder la notion de couplage sol-structure d'une nouvelle façon au travers une nouvelle classe d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire. Le couplage sol-structure est un problème délicat qu'il est nécessaire de bien considérer lorsque l'on cherche à déterminer les niveaux vibratoires se propageant à la surface du sol. Le travail de thèse présenté ici a permis de modéliser analytiquement le couplage d'une plaque en vibration de flexion avec un sol stratifié. L'étude du couplage sol-structure a permis de mettre en avant les différences et les similarités qu'il existe entre le couplage sol-structure et fluide-structure. Une comparaison théorie-expérience a notamment montré que ce modèle est bien adapté pour modéliser les dalles de tramway.

Dans de nombreux cas d'étude, les tramways sont la source de nuisance d'origine vibratoire qu'il est difficile de traiter lorsque la plateforme de tramway est déjà construite. Dans ce contexte il est nécessaire de développer de nouvelles techniques afin d'atténuer les vibrations. La modélisation d'une Barrière Vibratoire Horizontale présente dans ce contexte un grand intérêt. Les capacités d'atténuation vibratoire sont relativement importantes.

L'outil de modélisation d'une plaque en vibration de flexion couplée au sol permet ainsi un travail collaboratif avec les maîtres d'œuvre pour leur garantir un optimum de transmission vibratoire à la surface du sol. Il s'agit là d'un outil d'aide à la conception qui peut permettre d'éviter d'avoir trop souvent recours au résilient alors que le sol peut lui-même être une solution. Cet outil permet également de caractériser le rôle d'une barrière à la surface en recherchant à optimiser le rôle due à la rupture d'impédance.

Des perspectives voient le jour avec la possibilité de modéliser des systèmes intégrant des résilients adaptés au couplage sol/structure. Actuellement les performances de ces matériaux résilients sont simplement caractérisées en laboratoire sur des échantillons de faible surface qui ne prennent pas en compte les effets de flexion et les effets de sol. Le modèle peut prédire le couplage sol/structure pour une dalle et peut être étendu pour prédire le couplage dalle+résilient+sol adapté au système pour le développement d'une nouvelle génération de produits et/ou système.

On notera également des développements intéressants en ce qui concerne l'utilisation du problème inverse afin de caractériser les efforts injectés sur la structure. Il a

été présenté une introduction à la caractérisation des efforts injectés par le tramway qu'il convient d'approfondir considérablement. De plus d'autres applications pourraient voir le jour sur cette problématique notamment dans le cas de caractérisation d'efforts injectés par les chariots de supermarché, source de gêne importante pour les riverains.

1 Annexe A : Calcul des amplitudes des potentiel vecteur et scalaire pour un sol bicouche

Nous allons présenter dans cette partie les détails du calcul afin d'obtenir la fonction $N(k_x, k_y)$ dans le cas d'un sol bicouche.

Les solutions des potentiels de la couche 1 et 2 se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = A_1^i e^{-jk_{11}z} + A_1^r e^{jk_{11}z} \\ \tilde{\psi}_{x-1} = B_1^i e^{-jk_{21}z} + B_1^r e^{jk_{21}z} \\ \tilde{\psi}_{y-1} = C_1^i e^{-jk_{21}z} + C_1^r e^{jk_{21}z} \\ \tilde{\psi}_{z-1} = D_1^i e^{-jk_{21}z} + D_1^r e^{jk_{21}z} \end{cases} \begin{cases} \tilde{\phi}_2 = A_2^i e^{-jk_{12}z} \\ \tilde{\psi}_{x-2} = B_2^i e^{-jk_{22}z} \\ \tilde{\psi}_{y-2} = C_2^i e^{-jk_{22}z} \\ \tilde{\psi}_{z-2} = D_2^i e^{-jk_{22}z} \end{cases} \quad (13)$$

Le déplacement de chaque couche en fonction des potentiels peut s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{x-1} = jk_x \tilde{\phi}_1 + jk_y \tilde{\psi}_{z-1} - \frac{\partial \tilde{\psi}_{y-1}}{\partial z} \\ \tilde{u}_{y-1} = jk_y \tilde{\phi}_1 + \frac{\partial \tilde{\psi}_{x-1}}{\partial z} - jk_x \tilde{\psi}_{z-1} \\ \tilde{u}_{z-1} = \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial z} + jk_x \tilde{\psi}_{y-1} - jk_y \tilde{\psi}_{x-1} \end{cases} \begin{cases} \tilde{u}_{x-2} = jk_x \tilde{\phi}_2 + jk_y \tilde{\psi}_{z-2} - \frac{\partial \tilde{\psi}_{y-2}}{\partial z} \\ \tilde{u}_{y-2} = jk_y \tilde{\phi}_2 + \frac{\partial \tilde{\psi}_{x-2}}{\partial z} - jk_x \tilde{\psi}_{z-2} \\ \tilde{u}_{z-2} = \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} + jk_x \tilde{\psi}_{y-2} - jk_y \tilde{\psi}_{x-2} \end{cases} \quad (14)$$

En remplaçant les solutions des potentiels dans l'expression des déplacements, on obtient pour la couche 1 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{x-1} = jk_x (A_1^i e^{-jk_{11}z} + A_1^r e^{jk_{11}(z-h)}) + jk_y (D_1^i e^{-jk_{21}z} + D_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \quad - (-jk_{21} C_1^i e^{-jk_{21}z} + jk_{21} C_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \tilde{u}_{y-1} = jk_y (A_1^i e^{-jk_{11}z} + A_1^r e^{jk_{11}(z-h)}) + (-jk_{21} B_1^i e^{-jk_{21}z} + jk_{21} B_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \quad - jk_x (D_1^i e^{-jk_{21}z} + D_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \tilde{u}_{z-1} = (-jk_{11} A_1^i e^{-jk_{11}z} + jk_{11} A_1^r e^{jk_{11}(z-h)}) + jk_x (C_1^i e^{-jk_{21}z} + C_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \quad - jk_y (B_1^i e^{-jk_{21}z} + B_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \end{cases} \quad (15)$$

et pour la couche 2 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{x-2} = jk_x A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} + jk_y D_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} - (-jk_{22} C_2^i e^{-jk_{22}(z-h)}) \\ \tilde{u}_{y-2} = jk_y A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} - jk_{22} B_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} - jk_x D_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} \\ \tilde{u}_{z-2} = -jk_{12} A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} + jk_x C_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} - jk_y B_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} \end{cases} \quad (16)$$

On peut également obtenir l'expression des contraintes de chaque couche en fonction des déplacements de chaque couche :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz-1} = \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial u_{x-1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z-1}}{\partial x} \right) \\ \tilde{\sigma}_{yz-1} = \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\partial u_{y-1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z-1}}{\partial y} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz-1} = \lambda_1 \frac{\partial u_{x-1}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u_{y-1}}{\partial y} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u_{z-1}}{\partial z} \end{cases} \begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz-2} = \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial u_{x-2}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z-2}}{\partial x} \right) \\ \tilde{\sigma}_{yz-2} = \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\partial u_{y-2}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z-2}}{\partial y} \right) \\ \tilde{\sigma}_{zz-2} = \lambda_2 \frac{\partial u_{x-2}}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u_{y-2}}{\partial y} + (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial u_{z-2}}{\partial z} \end{cases} \quad (17)$$

En remplaçant l'expression des déplacements 15 et 16 dans 17, on obtient l'expression des contraintes dans la première couche et dans la deuxième couche. Afin de faciliter la lecture, on utilisera la couleur bleue pour le potentiels scalaire, rouge pour le potentiel vecteur suivant x, verte pour le potentiel vecteur suivant y et noire pour le potentiel vecteur suivant z.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{xz-1} = \frac{\mu_1}{2}(2k_x k_{11} A_1^i e^{-jk_{11}z} - 2k_x k_{11} A_1^r e^{jk_{11}(z-h)} + k_x k_y B_1^i e^{-jk_{21}z} + k_x k_y B_1^r e^{jk_{21}(z-h)} \\ + (k_{21}^2 - k_x^2) C_1^i e^{-jk_{21}z} + (k_{21}^2 - k_x^2) C_1^r e^{jk_{21}(z-h)} + k_y k_{21} D_1^i e^{-jk_{21}z} - k_y k_{21} D_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \tilde{\sigma}_{yz-1} = \frac{\mu_1}{2}(2k_y k_{11} A_1^i e^{-jk_{11}z} - 2k_y k_{11} A_1^r e^{jk_{11}(z-h)} + (k_y^2 - k_{21}^2) B_1^i e^{-jk_{21}z} + (k_y^2 - k_{21}^2) B_1^r e^{jk_{21}(z-h)} \\ - k_y k_x C_1^i e^{-jk_{21}z} - k_x k_y C_1^r e^{jk_{21}(z-h)} - k_x k_{21} D_1^i e^{-jk_{21}z} + k_x k_{21} D_1^r e^{jk_{21}(z-h)}) \\ \tilde{\sigma}_{zz-1} = (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^i e^{-jk_{11}z} + (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^r e^{jk_{11}(z-h)} \\ - 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^i e^{-jk_{21}z} + 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^r e^{jk_{21}(z-h)} + 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^i e^{-jk_{21}z} - 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^r e^{jk_{21}(z-h)} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{xz-2} = \frac{\mu_2}{2}(2k_x k_{12} A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} + k_x k_y B_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} + (k_{22}^2 - k_x^2) C_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} \\ + k_y k_{22} D_2^i e^{-jk_{22}(z-h)}) \\ \tilde{\sigma}_{yz-2} = \frac{\mu_2}{2}(2k_y k_{12} A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} + (k_y^2 - k_{22}^2) B_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} - k_y k_x C_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} \\ - k_x k_{22} D_2^i e^{-jk_{22}(z-h)}) \\ \tilde{\sigma}_{zz-2} = (-\lambda_2 k_{d2}^2 - 2\mu_2 k_{12}^2) A_2^i e^{-jk_{12}(z-h)} - 2\mu_2 k_y k_{22} B_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} + 2\mu_2 k_x k_{22} C_2^i e^{-jk_{22}(z-h)} \end{array} \right. \quad (19)$$

Afin d'identifier les amplitudes des potentiels scalaires et vecteurs des deux couches, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites. A l'interface entre la couche 1 et 2, il y a continuité des contraintes et des déplacements. A la surface, les contraintes sont nulles à l'exception de la contrainte sous la surface de la dalle couplée au sol. Enfin, afin d'assurer l'unicité de la solution, une condition de jauge est nécessaire pour chaque couche. Dans le domaine de Fourier, on traduit mathématiquement ces conditions par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{xz-1}(k_x, k_y, 0) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{yz-1}(k_x, k_y, 0) = 0 \\ \tilde{\sigma}_{zz-1}(k_x, k_y, 0) = \tilde{\sigma}_p(k_x, k_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{xz-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{\sigma}_{xz-2}(k_x, k_y, h) \\ \tilde{\sigma}_{yz-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{\sigma}_{yz-2}(k_x, k_y, h) \\ \tilde{\sigma}_{zz-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{\sigma}_{zz-2}(k_x, k_y, h) \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{x-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{u}_{x-2}(k_x, k_y, h) \\ \tilde{u}_{y-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{u}_{y-2}(k_x, k_y, h) \\ \tilde{u}_{z-1}(k_x, k_y, h) = \tilde{u}_{z-2}(k_x, k_y, h) \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{\psi}_1) = 0 \\ \text{div}(\vec{\psi}_2) = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

On obtient le système linéaire suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_1}{2}(2k_x k_{11} A_1^i - 2k_x k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h} + k_x k_y B_1^i + k_x k_y B_1^r e^{-jk_{21}h} + (k_{21}^2 - k_x^2)C_1^i + (k_{21}^2 - k_x^2)C_1^r e^{-jk_{21}h} \\ + k_y k_{21} D_1^i - k_y k_{21} D_1^r e^{-jk_{21}h}) = 0 \\ \frac{\mu_1}{2}(2k_y k_{11} A_1^i - 2k_y k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h} + (k_y^2 - k_{21}^2)B_1^i + (k_y^2 - k_{21}^2)B_1^r e^{-jk_{21}h} - k_y k_x C_1^i - k_x k_y C_1^r e^{-jk_{21}h} \\ - k_x k_{21} D_1^i + k_x k_{21} D_1^r e^{-jk_{21}h}) = 0 \\ (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2)A_1^i + (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2)A_1^r e^{-jk_{11}h} - 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^i + 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^r e^{-jk_{21}h} + \\ 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^i - 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^r e^{-jk_{21}h} = \tilde{\sigma}_p(k_x, k_y) \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_1}{2}(2k_x k_{11} A_1^i e^{-jk_{11}h} - 2k_x k_{11} A_1^r + k_x k_y B_1^i e^{-jk_{21}h} + k_x k_y B_1^r \\ + (k_{21}^2 - k_x^2)C_1^i e^{-jk_{21}h} + (k_{21}^2 - k_x^2)C_1^r + k_y k_{21} D_1^i e^{-jk_{21}h} - k_y k_{21} D_1^r) \\ - \frac{\mu_2}{2}(2k_x k_{12} A_2^i + k_x k_y B_2^i + (k_{22}^2 - k_x^2)C_2^i + k_y k_{22} D_2^i) = 0 \\ \frac{\mu_1}{2}(2k_y k_{11} A_1^i e^{-jk_{11}h} - 2k_y k_{11} A_1^r + (k_y^2 - k_{21}^2)B_1^i e^{-jk_{21}h} + (k_y^2 - k_{21}^2)B_1^r \\ - k_y k_x C_1^i e^{-jk_{21}h} - k_x k_y C_1^r - k_x k_{21} D_1^i e^{-jk_{21}h} + k_x k_{21} D_1^r) - \\ \frac{\mu_2}{2}(2k_y k_{12} A_2^i + (k_y^2 - k_{22}^2)B_2^i - k_y k_x C_2^i - k_x k_{22} D_2^i e^{-jk_{22}h}) = 0 \\ (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2)A_1^i e^{-jk_{11}h} + (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2)A_1^r \\ - 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^i e^{-jk_{21}h} + 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^r + 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^i e^{-jk_{21}h} - 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^r - \\ (-\lambda_2 k_{d2}^2 - 2\mu_2 k_{12}^2)A_2^i - 2\mu_2 k_y k_{22} B_2^i + 2\mu_2 k_x k_{22} C_2^i = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} jk_x(A_1^i e^{-jk_{11}h} + A_1^r) + jk_y(D_1^i e^{jk_{21}h} + D_1^r) - (-jk_{21}C_1^i e^{-jk_{21}h} + jk_{21}C_1^r) \\ - (jk_x A_2^i + jk_y D_2^i - (-jk_{22}C_2^i)) = 0 \\ jk_y(A_1^i e^{-jk_{11}h} + A_1^r) + (-jk_{21}B_1^i e^{-jk_{21}h} + jk_{21}B_1^r) - jk_x(D_1^i e^{-jk_{21}h} + D_1^r) \\ - (jk_y A_2^i - jk_{22}B_2^i - jk_x D_2^i) = 0 \\ (-jk_{11}A_1^i e^{-jk_{11}h} + jk_{11}A_1^r) + jk_x(C_1^i e^{-jk_{21}h} + C_1^r) - jk_y(B_1^i e^{-jk_{21}h} + B_1^r) \\ - (-jk_{12}A_2^i + jk_x C_2^i - jk_y B_2^i) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} jk_x B_1^i + jk_y C_1^i - jk_{21} D_1^i = 0 \\ jk_x B_1^r + jk_y C_1^r + jk_{21} D_1^r = 0 \\ jk_x B_2^i + jk_y C_2^i - jk_{22} D_2^i = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

Afin de réduire le nombre d'inconnue, on remplace l'expression de D_1^i , D_1^r et D_2^i dans les 6 conditions aux limites du problèmes. Leur expression en fonction des autres amplitudes s'écrit :

$$\begin{cases} D_1^i = \frac{k_x}{k_{21}} B_1^i + \frac{k_y}{k_{21}} C_1^i \\ D_1^r = -\frac{k_x}{k_{21}} B_1^r - \frac{k_y}{k_{21}} C_1^r \\ D_2^i = \frac{k_x}{k_{22}} B_2^i + \frac{k_y}{k_{22}} C_2^i \end{cases} \quad (27)$$

Après avoir remplacé dans les conditions aux limites, on obtient les 6 équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{2}(2k_x k_{11} A_1^i - 2k_x k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h} + 2k_x k_y B_1^i + 2k_x k_y B_1^r e^{-jk_{21}h} + \\ (k_{21}^2 - k_x^2 + k_y^2) C_1^i + (k_{21}^2 - k_x^2 + k_y^2) C_1^r e^{-jk_{21}h}) = 0 \\ \frac{\mu_1}{2}(2k_y k_{11} A_1^i - 2k_y k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h} + (k_y^2 - k_x^2 - k_{21}^2) B_1^i + (k_y^2 - k_x^2 - k_{21}^2) B_1^r e^{-jk_{21}h} \\ - 2k_y k_x C_1^i - 2k_y k_y C_1^r e^{-jk_{21}h}) = 0 \\ (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^i + (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^r e^{-jk_{11}h} - 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^i \\ + 2\mu_2 k_y k_{22} B_1^r e^{-jk_{21}h} + 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^i = \tilde{\sigma}_p(k_x, k_y) \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{2}(2k_x k_{11} A_1^i - 2k_x k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h}) - \frac{\mu_2}{2}(2k_x k_{12} A_2^i) \\ + \frac{\mu_1}{2}(k_x k_y 2B_1^i + k_x k_y 2B_1^r e^{-jk_{21}h}) - \frac{\mu_2}{2}(2k_x k_y B_2^i) \\ + \frac{\mu_1}{2}(k_{21}^2 - k_x^2 + k_y^2) C_1^i + \frac{\mu_1}{2}(k_{21}^2 - k_x^2 + k_y^2) C_1^r e^{-jk_{21}h} - \frac{\mu_2}{2}(k_{22}^2 - k_x^2 + k_y^2) C_2^i = 0 \\ \frac{\mu_1}{2}(2k_y k_{11} A_1^i - 2k_y k_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h}) - \frac{\mu_2}{2}(2k_y k_{12} A_2^i) \\ + \frac{\mu_1}{2}((k_y^2 - k_x^2 - k_{21}^2) B_1^i + (k_y^2 - k_x^2 - k_{21}^2) B_1^r e^{-jk_{21}h}) - \frac{\mu_2}{2}(k_y^2 - k_x^2 - k_{22}^2) B_2^i \\ + \frac{\mu_1}{2}(-2k_y k_x C_1^i - 2k_y k_y C_1^r e^{-jk_{21}h}) - \frac{\mu_2}{2}(-2k_y k_x C_2^i) = 0 \\ (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^i + (-\lambda_1 k_{d1}^2 - 2\mu_1 k_{11}^2) A_1^r e^{-jk_{11}h} - (-\lambda_2 k_{d2}^2 - 2\mu_2 k_{12}^2) A_2^i \\ - 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^i + 2\mu_1 k_y k_{21} B_1^r e^{-jk_{21}h} - (-2\mu_2 k_y k_{22} B_2^i) \\ + 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^i - 2\mu_1 k_x k_{21} C_1^r e^{-jk_{21}h} - 2\mu_2 k_x k_{22} C_2^i = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} jk_x A_1^i + jk_x A_1^r e^{-jk_{11}h} - jk_x A_2^i + \\ jk_y \frac{k_x}{k_{21}} B_1^i - \frac{k_x}{k_{21}} B_1^r e^{-jk_{21}h} - jk_y \frac{k_x}{k_{22}} B_2^i \\ - ((-jk_{21} + jk_y \frac{k_y}{k_{21}}) C_1^i + (jk_{21} - jk_y \frac{k_y}{k_{21}}) C_1^r e^{-jk_{21}h} + (-jk_{22} + jk_y \frac{k_y}{k_{22}}) C_2^i) = 0 \\ jk_y A_1^i + jk_y A_1^r e^{-jk_{11}h} - jk_y A_2^i + \\ (-jk_{21} - jk_x \frac{k_x}{k_{21}}) B_1^i + (jk_{21} + jk_x \frac{k_x}{k_{21}}) B_1^r e^{-jk_{21}h} + (jk_{22} + jk_x \frac{k_x}{k_{22}}) B_2^i \\ - jk_x \frac{k_y}{k_{22}} C_2^i - jk_x \frac{k_y}{k_{21}} C_1^i + jk_x \frac{k_y}{k_{21}} C_1^r e^{-jk_{21}h} = 0 \\ -jk_{11} A_1^i + jk_{11} A_1^r e^{-jk_{11}h} + jk_{12} A_2^i \\ - jk_y B_1^i - jk_y B_1^r e^{-jk_{21}h} + jk_y B_2^i \\ + jk_x C_1^i + jk_x C_1^r e^{-jk_{21}h} + jk_x C_2^i = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Afin d'obtenir l'expression des amplitudes, il est nécessaire de résoudre le système linéaire ci-dessus. On obtiendra des expressions en fonction de $\tilde{\sigma}_p(k_x, k_y)$. Ce problème peut se mettre sous forme matriciel où l'on doit inverser une matrice 9×9 pour chaque nombre d'onde (k_x, k_y) . L'expression de $N(k_x, k_y)$ qui nous intéresse s'écrit :

$$N(k_x, k_y) = jk_{11}(-A_1^i + A_1^r) + jk_x(C_1^i + C_1^r) - jk_y(B_1^i + B_1^r) \quad (31)$$

2 Annexe B : Calcul numérique et convergence des mobilités intermodales

2.1 Symetrie

La fonction à intégrer possède des symétries qu'il est intéressant d'exploiter afin de limiter le temps de calcul de l'intégrale. On remarque que $N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ est une fonction paire sur k_x et sur k_y . Le domaine d'intégration se trouve alors limité au quart du domaine et l'on peut écrire :

$$\gamma_{pqnm} = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (32)$$

Avant de poursuivre l'étude de la convergence de la fonction γ_{pqnm} , il est intéressant de s'arrêter sur la fonction $N(k_x, k_y)$. En effet cette fonction traduit la composante des caractéristiques propagatives des ondes dans le sol. Cette fonction est symétrique par rotation circulaire donc on peut adopter la représentation de la figure 35 où l'on représente la partie réelle et imaginaire de la fonction $N(k_r, \omega)$ avec $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

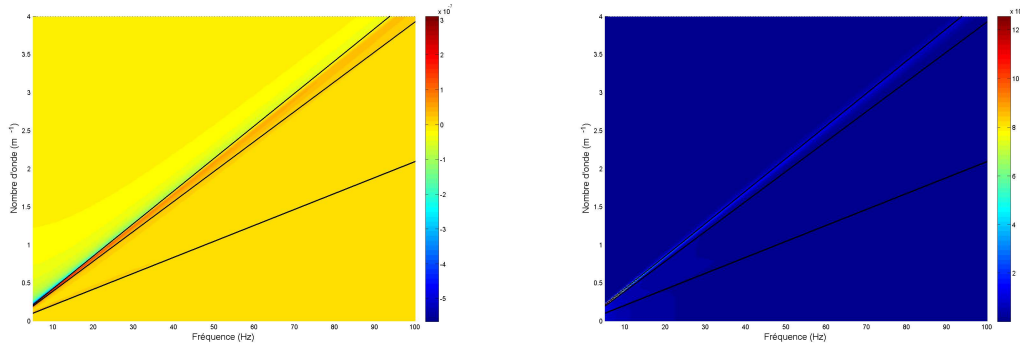


FIGURE 35 – Partie réelle (gauche) et imaginaire (droite) de la fonction $N(k_r, \omega)$ en fonction de la fréquence pour une sol ayant les caractéristiques suivantes : $c_s = 160m.s^{-1}$, $c_p = 600m.s^{-1}$, $\eta_s = 0.02$, $\eta_p = 0.02$, et $\rho = 1200Kg.m^{-3}$

A une fréquence ω donnée, on distingue trois valeurs de plus forte amplitudes qui correspondent aux ondes se propageant dans le milieu à savoir, les ondes de volumes c'est à dire les ondes S et P et l'onde de surface c'est à dire l'onde de Rayleigh.

2.2 Parité des modes de la fonction γ_{nmpq}

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la parité de la fonction à intégrer. On parlera d'une part de la parité de la fonction à intégrer à ne pas confondre avec la parité des modes au sens $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

La discussion porte sur les parités des modes (n, m) et (p, q) qui vont influencer la parité de la fonction $N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$. La fonction $N(k_x, k_y)$ est une fonction paire sur k_x et k_y donc la parité de la fonction $N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ ne dépend que de la parité de la fonction $\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$. Le dénominateur de

cette dernière fonction étant paire seul les termes $((-1)^n e^{-jk_x a} - 1)((-1)^p e^{jk_x a} - 1)$ et $((-1)^m e^{-jk_y b} - 1)((-1)^q e^{jk_y b} - 1)$ joue un rôle dans la parité de la fonction à intégrer.

Deux cas de figurent se présentent à savoir :

- Si les entiers p et n sont de même parité et si les entiers q et m sont de même parité, la fonction γ_{nmpq} est différente de zero.
- si p et n les entiers ne sont pas de même parité ou si les entiers q et m ne sont pas de même parité, la fonction γ_{nmpq} est égale à zero.

2.3 Convergence à l'infini

Étudions le vitesse de convergence de la fonction $N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$. Dans le domaine des k_r cette fonction se réécrit

$$N(k_r) = \frac{j \sqrt{k_d^2 - k_r^2} k_s^2}{4\mu \sqrt{k_d^2 - k_r^2} \sqrt{k_s^2 - k_r^2} k_r^2 - (\lambda k_d^2 + 2\mu(k_d^2 - k_r^2))(2k_r^2 - k_s^2)} \quad (33)$$

On s'intéresse au comportement de la fonction $N(k_r)$ à l'infini. Si l'on effectue un DL à l'ordre 0 du dénominateur, on obtient 0 ce qui ne répond pas à la question quand au comportement à l'infini de la fonction. IL faut donc effectuer un DL à l'ordre 1 de $\sqrt{k_d^2 - k_r^2} \sqrt{k_s^2 - k_r^2}$. En factorisant par k_r^2 on obtient :

$$\sqrt{k_d^2 - k_r^2} \sqrt{k_s^2 - k_r^2} = k_r^2 \sqrt{1 - \frac{k_d^2 + k_s^2}{k_r^2} + \frac{k_s^2 k_d^2}{k_r^4}} \approx k_r^2 \left(1 - \frac{k_d^2 + k_s^2}{2k_r^2}\right) \quad (34)$$

ce qui donne finalement

$$N(k_r) \approx \frac{-k_r k_s^2}{-4\mu \left(1 - \frac{k_d^2 + k_s^2}{2k_r^2}\right) k_r^4 - (2\mu(-k_r^2))(2k_r^2)} = \frac{-k_r k_s^2}{2\mu k_r^2 (k_d^2 + k_s^2)} \quad (35)$$

La fonction se comporte donc comme $\frac{1}{k_r}$ à l'infini.

En ce qui concerne la fonction $\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y)$ le comportement à l'infini est plus immédiat. On rappelle l'expression de $\tilde{\phi}_{nm}$:

$$\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) = nm\pi^2 L_x L_y \frac{((-1)^n e^{-jk_x L_x} - 1)((-1)^m e^{-jk_y L_y} - 1)}{((k_x L_x)^2 - (n\pi)^2)((k_y L_y)^2 - (m\pi)^2)} \quad (36)$$

A l'ordre 0, la fonction $\tilde{\phi}_{nm}$ se comporte en $\frac{1}{k_x^2 k_y^2}$. On en conclut donc que la fonction à intégrer $N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ à un comportement en ∞ en $\frac{1}{k_x^4 k_y^4 \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale en respect du critère de Riemann.

2.4 Convergence autour des points de singularités

Il convient également d'examiner un cas particulier dans le calcul de l'intégrale à savoir le cas où le dénominateur de $\tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{pq}$ peut s'annuler. Cela se produit si $(k_x a)^2 - (n\pi)^2 = 0$, $(k_y b)^2 - (m\pi)^2 = 0$, $(k_x a)^2 - (p\pi)^2 = 0$ ou $(k_y b)^2 - (q\pi)^2 = 0$. La démonstration complète bien que longue est relativement simple à mener.

Etant donné qu'elle ne présente pas un intérêt fondamentale, nous nous limiterons à montrer la cas où n, m, p et q sont paires. On peut écrire dans ce cas :

$$\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y) = \frac{(1-\cos(k_x L_x))(1-\cos(k_y L_y))}{((k_x L_x)^2 - (n\pi)^2)((k_y L_y)^2 - (m\pi)^2)((k_x L_x)^2 - (p\pi)^2)((k_y L_y)^2 - (q\pi)^2)} \quad (37)$$

On peut résumer les différents cas de figure suivant que $n = p$ ou $n \neq p$ et que $m = q$ ou $m \neq q$. Finalement on obtient [Laulagnet(1998)] :

$$\begin{aligned} \text{si } n = p, \text{ on a } & \begin{cases} \frac{1-\cos(k_x L_x)}{((\frac{k_x L_x}{n\pi})^2 - 1)^2} \rightarrow (\frac{p\pi}{2})^2 \\ k_x \rightarrow \frac{n\pi}{L_x} \end{cases} \\ \text{si } m = q, \text{ on a } & \begin{cases} \frac{1-\cos(k_y L_y)}{((\frac{k_y L_y}{m\pi})^2 - 1)^2} \rightarrow (\frac{m\pi}{2})^2 \\ k_y \rightarrow \frac{m\pi}{L_y} \end{cases} \\ \text{si } n \neq p, \text{ on a } & \begin{cases} \frac{1-\cos(k_x L_x)}{((\frac{k_x L_x}{n\pi})^2 - 1)((\frac{k_x L_x}{p\pi})^2 - 1)} \rightarrow 0 \\ k_x \rightarrow \frac{n\pi}{L_x} \text{ ou } k_x \rightarrow \frac{p\pi}{L_x} \end{cases} \\ \text{si } m \neq q, \text{ on a } & \begin{cases} \frac{1-\cos(k_y L_y)}{((\frac{k_y L_y}{m\pi})^2 - 1)((\frac{k_y L_y}{q\pi})^2 - 1)} \rightarrow 0 \\ k_y \rightarrow \frac{m\pi}{L_y} \text{ ou } k_y \rightarrow \frac{q\pi}{L_y} \end{cases} \end{aligned}$$

On a montré ici que la fonction $\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ à intégrer converge bien à l'infini ainsi qu'autour de ses points de singularités. Il a été également mis en avant que seuls les modes de même parité étaient couplés entre eux.

2.5 Prise en compte des différents cas de parité

Afin d'éviter les résidus numériques lors du calcul des mobilités intermodale de rayonnement vibratoire, il est nécessaire d'étudier les différents cas possible de parité sur les modes et de donner leurs expressions analytiques.

2.5.1 Mobilité intermodale γ^{11}

La mobilité intermodale des modes d'une plaque (n, m) couplée avec les modes de la même plaque (r, s) est donnée par :

$$\gamma_{nmrs}^{11} = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (38)$$

Suivant que l'on considère le cas d'une plaque aux conditions aux limites appuyées ou guidées, la parité change. On rappelle que la fonction $N(k_x, k_y)$ est une fonction paire sur les variables k_x et k_y donc seuls les termes $\tilde{\phi}_{nm}$ et $\tilde{\phi}_{rs}$ auront une influence sur l'expression finale du calcul des γ_{nmrs}^{11} .

- Cas de la plaque guidée :

Dans ce cas, la transformée de Fourier des amplitudes modales est donnée pour le mode (n, m) par :

$$\tilde{\phi}_{nm}(k_x, k_y) = -k_x k_y (L_{x1} L_{y1})^2 \frac{((-1)^n e^{-jk_x L_{x1}} - 1)}{(n\pi)^2 - (k_x L_{x1})^2} \frac{((-1)^m e^{-jk_y L_{y1}} - 1)}{(m\pi)^2 - (k_y L_{y1})^2} \quad (39)$$

et pour le mode (r, s)

$$\tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) = -k_x k_y (L_{x1} L_{y1})^2 \frac{((-1)^r e^{jk_x L_{x1}} - 1)}{(r\pi)^2 - (k_x L_{x1})^2} \frac{((-1)^s e^{jk_y L_{y1}} - 1)}{(s\pi)^2 - (k_y L_{y1})^2} \quad (40)$$

Les termes ayant un rôle dans la parité suivant k_x sont :

$$A(k_x) = ((-1)^n e^{-jk_x L_{x1}} - 1)((-1)^r e^{jk_x L_{x1}} - 1) \quad (41)$$

La fonction $A(k_x)$ doit être une fonction paire pour que l'intégrale soit différente de 0. Si (p, r) sont de parité différente le résultat de l'intégrale est 0.

Si $(p, r) = (\text{paire}, \text{paire})$, on a

$$A(k_x) = (e^{-jk_x L_{x1}} - 1)(e^{jk_x L_{x1}} - 1) \quad (42)$$

$$A(k_x) = 2(1 - \cos(k_x L_{x1})) \quad (43)$$

Si $(p, r) = (\text{impaire}, \text{impaire})$, on a

$$A(k_x) = (-e^{-jk_x L_{x1}} - 1)(-e^{jk_x L_{x1}} - 1) \quad (44)$$

$$A(k_x) = 2(1 + \cos(k_x L_{x1})) \quad (45)$$

Dans le cas de la plaque aux conditions aux limites appuyées, les cas de parité à prendre en compte sont les mêmes.

Finalement on ne retiendra que les cas où $nmpq$ sont *paire - paire - paire - paire*, *impaire - paire - impaire - paire*, *paire - impaire - paire - impaire* et *impaire - impaire - impaire - impaire* c'est-à-dire 4 cas.

2.5.2 Mobilité intermodale γ^{12}

On rappelle l'expression de la mobilité intermodale des mode (p, q) de la plaque 1 avec les modes (r, s) de la plaque 2 :

$$\gamma_{pqrs}^{12} = 4 \int_0^{+\infty} N(k_x, k_y) e^{-jk_x(a+e_x) - jk_y e_y} \tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (46)$$

- Cas de la plaque guidée :

$$\tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y) = -k_x k_y (L_{x2} L_{y2})^2 \frac{((-1)^p e^{-jk_x L_{x2}} - 1)}{(p\pi)^2 - (k_x L_{x2})^2} \frac{((-1)^q e^{-jk_y L_{y2}} - 1)}{(q\pi)^2 - (k_y L_{y2})^2} \quad (47)$$

$$\tilde{\phi}_{rs}^*(k_x, k_y) = -k_x k_y (L_{x1} L_{y1})^2 \frac{((-1)^r e^{jk_x L_{x1}} - 1)}{(r\pi)^2 - (k_x L_{x1})^2} \frac{((-1)^s e^{jk_y L_{y1}} - 1)}{(s\pi)^2 - (k_y L_{y1})^2} \quad (48)$$

Les termes ayant un rôle dans la parité suivant k_x sont :

$$A(k_x) = e^{-jk_x(L_{x1}+e_x)}((-1)^p e^{-jk_x L_{x2}} - 1)((-1)^r e^{jk_x L_{x1}} - 1) \quad (49)$$

La fonction $A(k_x)$ doit être une fonction paire pour que l'intégrale soit différente de 0.

Si $(p, r) = (\text{paire}, \text{paire})$, on a

$$A(k_x) = e^{-jk_x e_x} (e^{-jk_x L_{x2}} - 1)(1 - e^{-jk_x L_{x1}})$$

$$A(k_x) = e^{-jk_x e_x} e^{-jk_x \frac{L_{x2}}{2}} e^{-jk_x \frac{L_{x1}}{2}} (e^{-jk_x \frac{L_{x2}}{2}} - e^{jk_x \frac{L_{x2}}{2}})(e^{jk_x \frac{L_{x1}}{2}} - e^{-jk_x \frac{L_{x1}}{2}})$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_x) = \cos(k_x(e_x + \frac{L_{x2}}{2} + \frac{L_{x1}}{2}))(-j2 \sin(k_x \frac{L_{x2}}{2}))(j2 \sin(k_x \frac{L_{x1}}{2}))$$

Si $(p, r) = (\text{impaire}, \text{paire})$, on a :

$$A(k_x) = e^{-jk_x e_x} (-e^{-jk_x L_{x2}} - 1)(1 - e^{-jk_x L_{x1}})$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_x) = -2j \sin(k_x(e_x + \frac{L_{x2}}{2} + \frac{L_{x1}}{2}))(-2 \cos(k_x \frac{L_{x2}}{2}))(j2 \sin(k_x \frac{L_{x1}}{2}))$$

Si $(p, r) = (\text{paire}, \text{impaire})$, on a :

$$A(k_x) = e^{-jk_x e_x} (e^{-jk_x L_{x2}} - 1)(-1 - e^{-jk_x L_{x1}})$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_x) = -2j \sin(k_x(e_x + \frac{L_{x2}}{2} + \frac{L_{x1}}{2}))(-2j \sin(k_x \frac{L_{x2}}{2}))(-2 \cos(k_x \frac{L_{x1}}{2}))$$

Si $(p, r) = (\text{impaire}, \text{impaire})$, on a :

$$A(k_x) = e^{-jk_x e_x} (-e^{-jk_x L_{x2}} - 1)(-1 - e^{-jk_x L_{x1}})$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_x) = 2 \cos(k_x(e_x + \frac{L_{x2}}{2} + \frac{L_{x1}}{2}))(-2 \cos(k_x \frac{L_{x2}}{2}))(-2 \cos(k_x \frac{L_{x1}}{2}))$$

Les termes ayant un rôle dans la parité suivant k_y sont :

$$B(k_y) = e^{-jk_y e_y} ((-1)^q e^{-jk_y L_{y2}} - 1)((-1)^s e^{jk_y L_{y1}} - 1) \quad (50)$$

La fonction $B(k_y)$ doit être une fonction paire pour que l'intégrale soit différente de 0.

Si $(q, s) = (\text{paire}, \text{paire})$, on a

$$A(k_y) = e^{-jk_y e_y} (e^{-jk_y L_{y2}} - 1)(e^{jk_y L_{y1}} - 1)$$

$$A(k_y) = e^{-jk_y e_y} e^{-jk_y \frac{L_{y2}}{2}} e^{jk_y \frac{L_{y1}}{2}} (e^{-jk_y \frac{L_{y2}}{2}} - e^{jk_y \frac{L_{y2}}{2}})(e^{jk_y \frac{L_{y1}}{2}} - e^{-jk_y \frac{L_{y1}}{2}})$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_y) = \cos(k_y(e_y + \frac{L_{y2} - L_{y1}}{2}))(-j2 \sin(k_y \frac{L_{y2}}{2}))(j2 \sin(k_y \frac{L_{y1}}{2}))$$

Si $(q, s) = (impaire, paire)$, on a

$$A(k_y) = e^{-jk_y e_y}(-e^{-jk_y L_{y2}} - 1)(e^{jk_y L_{y1}} - 1)$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_y) = -2j \sin(k_y(e_y + \frac{L_{y2} - L_{y1}}{2}))(-2 \cos(k_y \frac{L_{y2}}{2}))(j2 \sin(k_y \frac{L_{y1}}{2}))$$

Si $(q, s) = (paire, impaire)$, on a

$$A(k_y) = e^{-jk_y e_y}(e^{-jk_y L_{y2}} - 1)(-e^{jk_y L_{y1}} - 1)$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_y) = -2j \sin(k_y(e_y + \frac{L_{y2} - L_{y1}}{2}))(-2j \sin(k_y \frac{L_{y2}}{2}))(-2 \cos(k_y \frac{L_{y1}}{2}))$$

Si $(q, s) = (impaire, impaire)$, on a

$$A(k_y) = e^{-jk_y e_y}(-e^{-jk_y L_{y2}} - 1)(-e^{jk_y L_{y1}} - 1)$$

En ne conservant que la partie paire de la fonction on obtient :

$$A(k_y) = -2 \cos(k_y(e_y + \frac{L_{y2} - L_{y1}}{2}))(-2 \cos(k_y \frac{L_{y2}}{2}))(-2 \cos(k_y \frac{L_{y1}}{2}))$$

Bibliographie

- [2631-1(1997)] ISO 2631-1. Vibrations et chocs mécaniques - évaluations de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps. *Norme internationale*, 1997.
- [2631-2(1989)] ISO 2631-2. Estimation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps - partie 2 : Vibrations continues et induites par les chocs dans les bâtiments (1 à 80hz). *Norme internationale*, 1989.
- [Achenbach(1973)] J.D. Achenbach. *Wave propagation in Elastic Solids*. Elsevier, 1973. ISBN 978-0-7204-0325-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/book/9780720403251>.
- [Al Shaer()] A. Al Shaer. *Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées - Approche dynamique*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001592>.
- [Andersen(2002)] L. Andersen. *Wave propagation in infinite structures and media*. PhD thesis, Aalborg University, 2002. URL <http://www.wind.civil.aau.dk/dynthesis/phd2.pdf>.
- [Andersen and Nielsen(2005)] L. Andersen and S.R.K. Nielsen. Reduction of ground vibration by means of barriers or soil improvement along a railway track. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25(7-10) :701–716, 2005. doi : 10.1016/j.soildyn.2005.04.007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726105000576>.
- [Anh(2011)] Ta Quang Anh. *Modélisation des propriétés mécaniques anisotropes aléatoires et impacts sur la propagation des ondes élastiques*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2011. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00584678/>.
- [Atalla et al.(1996)Atalla, Nicolas, and Gauthier] N. Atalla, J. Nicolas, and C. Gauthier. Acoustic radiation of an unbaffled vibrating plate with general elastic boundary conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99(3) :1484–1494, 1996. doi : 10.1121/1.414727. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/99/3/10.1121/1.414727>.
- [Auersch(2013)] Lutz Auersch. Response to harmonic wave excitation of finite or infinite elastic plates on a homogeneous or layered half-space. *Computers and Geotechnics*, 51 :50–59, 2013. doi : 10.1016/j.compgeo.2013.02.001. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X1300027X>.
- [Badsar et al.(2009)Badsar, Schevenels, and Degrande] S.A. Badsar, M. Schevenels, and G. Degrande. The determination of the damping parameter of soils with the sasw method. In *Computational Methods in Structural Dynamics and*

- Earthquake Engineering*, pages 1–16, 2009. URL <https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/252070/1/CD445.pdf>.
- [Bahrekazemi(2004)] Me. Bahrekazemi. *Train-Induced Ground Vibration and Its Prediction*. PhD thesis, Royal Institute of Technology - Stockholm, 2004.
- [Barkan(1962)] D. D. Barkan. *Dynamics of bases and foundations*. 1962. ISBN 978-0070036505.
- [Barros(2007)] L.D.E. Barros. *Sensibilité et inversion des formes d'ondes sismiques en milieu poreux stratifié*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I,, 2007. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00204917/en/>.
- [Ben Abdelounis(2010)] H. Ben Abdelounis. *Dynamique et vibroacoustique du contact rugueux : experimentation et modélisation*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2010. URL http://www.researchgate.net/publication/48907238_Dynamique_et_vibroacoustique_du_contact_rugueux__exprimentation_et_modlisation.
- [Bensouam(2003)] J. Bensouam. *Représentation intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université de Nantes, 2003. URL <http://architexte.ircam.fr/textes/Bensoam03b/index.pdf>.
- [Bodet(2005)] L. Bodet. *Limites theoriques et expérimentales de l'interpretation de la dispersion des ondes de Rayleigh : apport de la modelisation numerique et physique*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005. URL <http://www.theses.fr/2005NANT2145>.
- [Bongini(2008)] E. Bongini. *Modèle acoustique global et synthèse sonore du bruit d'un véhicule : application aux véhicules ferroviaires*. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00473940/>.
- [Bonney-Claudet(2004)] S. Bonney-Claudet. *Nature du bruit de fond sismique : implications pour les études des effets de site*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2004. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007397/>.
- [Burton and G.F.(1971)] A.J. Burton and Miller G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *A*, 323(1553), 1971. doi : 10.1098/rspa.1971.0097. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/323/1553/201>.
- [Celebi et al.(2009)] Celebi, Firat, Beyhan, Cankaya, Vural, and Kirtel] E. Celebi, S. Firat, G. Beyhan, I. Cankaya, I. Vural, and O. Kirtel. Field experiments on wave propagation and vibration isolation by using wave barriers. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(5) : 824–833, 2009. doi : 10.1016/j.soildyn.2008.08.007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726108001346>.
- [Constable et al.(1987)] Constable, Parker, and Constable] S.C. Constable, R.L. Parker, and G. Constable. Occam's inversion : A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3) :289–300, 1987. doi : 10.1190/1.1442303. URL <http://geophysics.geoscienceworld.org/content/52/3/289.short?rss=1&ssource=mfc>.
- [Coquel(2007)] G. Coquel. Etude d'impact vibratoire du prolongement du tramway t1 de noisy-le-sec a val de fontenay version initiale. Technical report, RATP -

- Délégation Générale - Innovation et Développement Durable - Entité Acoustique et Vibrations, 2007. URL <http://www.t1bobigny-valdefontenay.fr/wp-content/uploads/2013/06/PieceJ-Chap5-AnnexesAdmin.pdf>.
- [Coquel(2008)] G. Coquel. *Propagation et ré-émission du bruit solidien d'origine ferroviaire. Application aux bâtiments riverains*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2008. URL http://www.cstb.fr/dae/fileadmin/user_upload/documents/Theses/2008_-_COQUEL.pdf.
- [Cottureau(2007)] Regis Cottureau. *Probabilistic models of impedance. Application to dynamic soil-structure interaction*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00132950/>.
- [Davies(1971)] H.G. Davies. Low frequency random excitation of water-loaded rectangular plate. *Journal of Sound and Vibrations*, 15(1) :107–126, 1971.
- [Degen et al.(2006)Degen, Behr, and Grutz] K.G. Degen, W. Behr, and H.P Grutz. Investigations and results concerning railway-induced ground-borne vibrations in germany. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5) :865–872, 2006. doi : 10.1016/j.jsv.2005.12.021. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05008096>.
- [Destrade(2007)] M Destrade. *Ondes et stabilité dans les solides élastiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00192249>.
- [Destuynder(2007)] P. Destuynder. *Vibrations des structures et des systèmes couplés*. Paris, 2007. ISBN 978-2-7462-1520-7. URL <http://www.eyrolles.com/Sciences/Livre/vibrations-des-structures-et-des-systemes-couples-9782746215207>.
- [Dominguez(1993)] J. Dominguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993. doi : 978-1853122583.
- [Ewing et al.(1957)Ewing, Jardetzky, and Press] W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, and F. Press. *Elastic waves in layered media*. 1957. ISBN 978-0070198609.
- [Faure(2011)] B. Faure. *Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00721959>.
- [Foti(2000)] S. Foti. *Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves*. PhD thesis, Politecnico di torino, 2000. URL <http://porto.polito.it/2497212/>.
- [Foti et al.(2014)Foti, Lai, Rix, and Strobbia] S. Foti, C.G. Lai, G.J. Rix, and C. Strobbia. *Surface Wave Methods for Near-Surface Site Characterization*. 2014. ISBN 978-0415678766. URL <https://www.crcpress.com/product/isbn/9780415678766>.
- [Francois et al.(2012)Francois, Schevenels, Thyssen, Borgions, and Degrande] S. Francois, M. Schevenels, B. Thyssen, J. Borgions, and G. Degrande. Design and efficiency of a composite vibration isolating screen in soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 39 : 113–127, 2012. doi : 10.1016/j.soildyn.2012.03.007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026772611200070X>.

- [Gandomzadeh(2011)] A. Gandomzadeh. *Interaction Dynamique Sol-Structure : Influence des Nonlinéarités de Comportement du Sol*. PhD thesis, Université Paris Est, 2011.
- [Gautier(2015)] P.E. Gautier. Slab track : Review of existing systems and optimization potentials including very high speed. *Construction and Building Materials*, 2015. doi : 10.1016/j.conbuildmat.2015.03.102. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061815003876>.
- [Grau and Laulagnet(2014a)] L. Grau and B. Laulagnet. The ground cross-modal impedance as a tool to analyse multiple plates coupled to the ground. In *ISMA 2014*, pages 1977–1990, 2014a. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01113416>.
- [Grau and Laulagnet(2014b)] L. Grau and B. Laulagnet. Similarités du couplage fluide-structure et sol-structure - cas des plaques. In *Congrès Français d'acoustique*, pages 1449–1456, 2014b. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00992041/>.
- [Grau and Laulagnet(2015a)] L. Grau and B. Laulagnet. Ground cross-modal impedance as a tool for analyzing ground/plate interaction and ground wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(5) :2901–2914, 2015a. doi : 10.1121/1.4919332. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/137/5/10.1121/1.4919332>.
- [Grau and Laulagnet(2015b)] L. Grau and B. Laulagnet. Effect of horizontal wave barriers on ground vibration propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2), 2015b.
- [Grau and Laulagnet(Submitted in 2015 - under review)] L. Grau and B. Laulagnet. On the use of cross modal radiation impedances in plate-ground coupling. *Acta acustica*, Submitted in 2015 - under review.
- [Groby(2005)] J.P. Groby. *Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville*. PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2005. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00115636/>.
- [Guerin(1996)] N. Guerin. *Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00529384>.
- [Gunther(2004)] T. Gunther. *Inversion Methods and Resolution Analysis for the 2D / 3D Reconstruction of Resistivity Structures from DC Measurements*. PhD thesis, Technischen Universität Bergakademie Freiberg, 2004. URL http://www.qucosa.de/recherche/frontdoor/?tx_slubopus4frontend%5bid%5d=urn:nbn:de:swb:105-4152277.
- [Guyader(2002)] J.L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. 2002. ISBN 2-7462-0546-7. URL <http://www.lavoisier.fr/livre/physique/vibrations-des-milieux-continus/guyader/descriptif-9782746205468>.
- [Hanson et al.(2006)Hanson, Towers, Meister, and Miller] C.E. Hanson, D.A. Towers, L.D. Meister, and H.M. Miller. Transit noise and vibration impact assessment. Technical report, U.S. Department of Transportation Federal Transit Administration, 2006. URL http://www.fta.dot.gov/12347_2233.html.

- [Harthong(2010)] J. Harthong. Cours d'analyse. Technical report, 2010. URL <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00519301v1>.
- [Haskell(1953)] N.A. Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1) :17–34, 1953. doi : 10.1029/SP030p0086. URL <http://www.bssaonline.org/content/43/1/17.short?rss=1&ssource=mfc>.
- [Heckl and Petersson(2005)] M. Heckl and B.A.T. Petersson. *Structure-Borne Sound - Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*. Springer, 2005. ISBN 978-3-540-22696-3. URL <http://www.springer.com/fr/book/9783540226963>.
- [ISO 14837-1()] ISO 14837-1. Vibrations mécaniques – Vibrations et bruits initiés au sol dus à des lignes ferroviaires – Partie 1 : Directives générales, 2005.
- [ISO 8041()] ISO 8041. Human response to vibration - Measuring instrumentation, 2005.
- [Jacobsen(2011)] F. Jacobsen. The sound field in a reverberation room, 2011.
- [Jacqueline(2014)] D. Jacqueline. Caractériser l'état de serrage du ballast par la propagation d'ondes, 2014.
- [Jean(2001)] P. Jean. Boundary and finite elements for 2d soil-structure interactions problems. *Acta Acustica*, 87(1) :56–66, 2001. URL <http://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/2001/00000087/00000001/art00008?crawler=true>.
- [Jean(2015)] P. Jean. A 3dfem/bem code for ground-structure interaction : Implementation strategy including the multi-traction problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 59 :52–61, 2015. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095579971500106X>.
- [Jean et al.(2004)Jean, Guigou, and Villot] P. Jean, C. Guigou, and M. Villot. 2d1/2 bem model of ground structure interaction. *Journal of Building Acoustics*, 11 :157–173, 2004.
- [Jones et al.(2002)Jones, Thompson, and Petyt] C.J.C. Jones, D.J. Thompson, and M. Petyt. A model for ground vibration from railway tunnels. In *Proceedings of the institution of Civil Engineering Transport*, volume 153, pages 121–129, 2002. doi : 10.1680/tran.2002.153.2.121. URL <http://www.icevirtuallibrary.com/content/article/10.1680/tran.2002.153.2.121>.
- [Jones et al.(1998)Jones, Le Houedec, and Petyt] D.V. Jones, D. Le Houedec, and M. Petyt. Ground vibrations due to a rectangular harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*, 212(1) :61–74, 1998. doi : 10.1006/jsvi.1997.1367. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X97913675>.
- [Junger and Feit(1986)] M.C. Junger and D. Feit. *Sound, Structures, and Their Interaction*. The MIT Press, 1986. ISBN 9780262600538.
- [Karlström(2006)] A. Karlström. An analytical model for ground vibrations from accelerating trains. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5) :587–598, 2006. doi : 10.1016/j.jsv.2005.08.038. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05007595>.

- [Karlström and Boström(2006)] A. Karlström and A. Boström. An analytical model for train-induced ground vibrations from railways. *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2) :221–241, 2006. doi : 10.1016/j.jsv.2005.07.041. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05005183>.
- [Karlström and Boström(2007)] A. Karlström and A. Boström. Efficiency of trenches along railways for trains moving at sub- or supersonic speeds. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(7) :625–641, 2007. doi : 10.1016/j.soildyn.2006.12.005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0267726106002168>.
- [Kausel(2011)] E. Kausel. *Fundamental solutions in elastodynamics*. 2011. ISBN 9780521375993. URL <http://www.cambridge.org/us/academic/subjects/engineering/civil-and-geotechnical-engineering/fundamental-solutions-elastodynamics-compendium>.
- [Kausel and Peek(1982)] E. Kausel and R. Peek. Dynamic loads in the interior of a layered stratum : An explicit solution. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(5) :1459–1481, 1982. URL <http://bssa.geoscienceworld.org/content/72/5/1459.full.pdf+html>.
- [Kausel and Roesset(1981)] E. Kausel and J.M. Roesset. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological of America*, 71(6) :1743–1761, 1981. doi : 10.1.1.117.3358. URL <http://www.bssaonline.org/content/71/6/1743.refs>.
- [Komatitsch(1997)] D. Komatitsch. *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. PhD thesis, Institut de physique du globe de paris - IPGP, 1997. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00007568/>.
- [Kouroussis(2009)] G. Kouroussis. *Modélisation des effets vibratoires du trafic ferroviaire sur l'environnement*. PhD thesis, Université de Mons, 2009. URL <http://mecara.fpms.ac.be/recherche.htm#Theses>.
- [Laulagnet(1998)] B. Laulagnet. Sound radiation by a simply supported unbaffled plate. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(5) :2451–2462, 1998. doi : 10.1121/1.422765. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/103/5/10.1121/1.422765>.
- [Laulagnet(2012)] B. Laulagnet. Soil effect on the finite simply supported plate vibration. *ASME 2012 Noise Control and Acoustics Division Conference*, pages 1–6, August 2012. doi : 10.1115/NCAD2012-0100. URL <http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?articleID=1737067>.
- [Leclere(2012)] Q. Leclere. Caractérisation expérimentale de sources vibratoires et acoustiques, 2012. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01006188/>.
- [Leissa(1969)] A.W. Leissa. *Vibrations of plates*. NASA, 1969. URL <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19700009156>.
- [Lesueur(1988)] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures : vibroacoustique, interactions fluide-structure*. Collection de la Direction des études et recherches d'Electricité de France. 1988. ISBN 2-212-01613-1. URL <http://opac.inria.fr/record=b1076095>.

- [Lombaert and Degrande(2009)] G. Lombaert and G. Degrande. Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of intercity and high-speed trains. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3-5) :1036–1066, 2009. doi : 10.1016/j.jsv.2008.07.003. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X0800624X>.
- [Love(1911)] A E H Love. *Some Problems of Geodynamics*. Cornell University Library, 1911. ISBN 978-1429704137.
- [Love(2013)] A E H Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107618091. URL <http://www.cambridge.org/us/academic/subjects/mathematics/historical-mathematical-texts/treatise-mathematical-theory-elasticity-4th-edition>.
- [Maidanik(1962)] G. Maidanik. Response of ribbed panel to reverberant coustic field. *The Journal of the American Society of Acoustics*, 34(6) :809–826, 1962. doi : 10.1121/1.1918200. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/34/6/10.1121/1.1918200>.
- [Maldonado(2008)] Marc Maldonado. *Vibrations dues au passage d'un tramway : Mesures experimentales et simulations numériques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2008. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00356222/>.
- [Malecki(1969)] I. Malecki. *Physical Foundations of Technical Acoustics*. Elsevier, 1969. ISBN 978-0-08-011097-4. URL <http://www.sciencedirect.com/science/book/9780080110974>.
- [Metrikine et al.(1999)Metrikine, Wolfert, and Vrouwenvelder] A.V. Metrikine, A.R.M. Wolfert, and A.C.W.M. Vrouwenvelder. Steady-state response of periodically supported structures to a moving load. *HERON Delft University of Technology*, 44(2) :91–107, 1999. URL <http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid%3A689175ac-0bda-41b9-9659-819991c3a097/>.
- [Miron(2005)] S. Miron. *Méthodes multilinéaires et hypercomplexes en traitement d'antenne multicomposante haute résolution*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199884/>.
- [Mirza et al.(2012)Mirza, Smekal, Nelain, Thompson, Stiebel, Degrande, Lombaert, Verbraken, C. A. Mirza, A. Smekal, B. Nelain, D. Thompson, D. Stiebel, G. Degrande, G. Lombaert, H. Verbraken, R. Garburg, and V. Cuellar. Rivas wp1.2 measurement protocol for parameters influencing mitigation effects. Technical report, 2012. URL <http://www.rivas-project.eu/>.
- [Morse and Ingard(1987)] P.M. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1987. ISBN 9780691024011.
- [Mostefa(2010)] L. Mostefa. *Modélisation analytique d'un rail sur appui continu : Analyse paramétrique*. PhD thesis, Université Mentouri, 2010.
- [Nazarian(1984)] S. Nazarian. *In situ determination of elastic moduli of soil deposits and pavement systems by spectra-analysis-of-surface-waves*. PhD thesis, The University of Texas, Austin, 1984. URL <http://library.ctr.utexas.edu/digitized/texasarchive/phase2/368-1F-CTR.pdf>.

- [Nazarian and Stokoe(1984)] S. Nazarian and K.H. Stokoe. In situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves. In *8th Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, CA*, pages 31–38, 1984.
- [Nelisse et al.(1998)] Nelisse, Beslin, and J. H. Nelisse, O. Beslin, and Nicolas J. A generalized approach for the acoustic radiation from a baffled or unbaffled plate with arbitrary boundary conditions, immersed in a light or heavy fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 211(2) :207–225, 1998. doi : 10.1006/jsvi.1997.1359. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X97913596>.
- [Park et al.(1999)] Park, Miller, and Xia] C.B. Park, R.D. Miller, and J. Xia. Multi-channel analysis of surface waves. *Geophysics*, 64 :800–808, 1999.
- [Pascal(2008)] J. Pascal. Vibroacoustique des structures planes. Technical report, 2008.
- [Pei(2007)] D. Pei. *Modeling and Inversion of Dispersion Curves of Surface Waves in Shallow Site Investigations*. PhD thesis, University of Nevada, Reno, 2007.
- [Pham(2008)] P.T.N. Pham. *Etude en place et au laboratoire du comportement en petites deformations des sols argileux naturels*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2008. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00353428/>.
- [Pierce(1989)] A.D. Pierce. *Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. American Institute of Physics, 1989. ISBN 978-0883186121.
- [Real et al.(2011)] Real, Martinez, Montalban, and Villanueva] J. Real, P. Martinez, L. Montalban, and A. Villanueva. Modelling vibrations caused by tram movement on slab track line. *Mathematical and Computer Modelling*, 54 (1-2) :280–291, 2011. doi : 10.1016/j.mcm.2011.02.010. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717711001002>.
- [Rhayma(2010)] N. Rhayma. *Contribution à l'évolution des méthodologies de caractérisation et d'amélioration des voies ferrées*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2010. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00710897>.
- [Ricci(2006)] L. Ricci. *Modélisations discrètes et continues des voies ferrées ballastées*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2006. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00003422/>.
- [Romdhane()] M.A. Romdhane. PhD thesis.
- [Ropars(2011)] P. Ropars. *Modélisation des vibrations d'origine ferroviaire transmises aux bâtiments par le sol*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011. URL http://www.cstb.fr/dae/fileadmin/user_upload/documents/Theses/2011_-_ROPARS.pdf.
- [Roussillon(2006)] P. Roussillon. *Interaction sol-structure et interaction ville : aspects fondamentaux et modélisation*. PhD thesis, INSA Lyon, 2006. URL <http://ori-oai-search.insa-lyon.fr/notice/view/default%253AUNIMARC%253A152530>.
- [Sandman(1975)] B.E. Sandman. Motion of a three layered elastic-viscoelastic plate under fluid loading. *The Journal of the American Society of Acoustics*, 57(5) : 1097–1107, 1975. doi : 10.1121/1.380559. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/57/5/10.1121/1.380559>.

- [Saulot(2005)] A. Saulot. *Analyse tribologique du contact roue-rail Modélisation et expérimentations*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2005. URL <http://ori-oai-search.insa-lyon.fr/notice/view/default%253AUNIMARC%253A144016>.
- [Schilder and Diederich(2006)] R. Schilder and D. Diederich. Installation quality of slab track - a decisive factor for maintenance. *RTR Special*, 2006. URL http://www.rhomergrail.com/fileadmin/user_upload/Bahntechnik/Bilder/Downloads/RTR_Special_2007_Installation_Quality_of_Slab_Track.pdf.
- [Seghir(2010)] A. Seghir. *Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure Application à l'étude des barrages poids en béton*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2010. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00627044/>.
- [Sheng et al.(1999)Sheng, Jones, and Petyt] X. Sheng, D.V. Jones, and M. Petyt. Ground vibrations generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 228(1) :129–156, 1999. doi : 0.1006/jsvi.1999.2406. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X99924069>.
- [Steenbergen and Metrikine(2007)] M.J.M.M. Steenbergen and A.V. Metrikine. The effect of the interface conditions on the dynamic response of a beam on a half-space to a moving load. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(1) :33–54, 2007. doi : 10.1016/j.euromechsol.2006.03.003. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753806000271>.
- [Strobbia()] C. Strobbia. Surface wave methods. Technical report. URL <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.129.9410&rep=rep1&type=pdf>.
- [Strobbia and Foti(2006)] C. Strobbia and S. Foti. Multi offset phase analysis of surface wave data (mopa). *Journal of Applied Geophysics*, 59(4) :113–127, 2006. doi : 10.1016/j.jappgeo.2005.10.009. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0926985105000959>.
- [Tang and Hung(2001)] Y.B. Tang and H.H. Hung. A 2.5d finite/infinite element approach for modelling visco-elastic bodies subjected to moving loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(11) :1317–1336, 2001. doi : 10.1002/nme.208. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.208/abstract>.
- [Tarantola(2005)] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. 2005. ISBN 0-89871-572-5.
- [Thompson(2015)] D. Thompson. *Railway Noise and Vibration : Mechanisms, Modeling and Means of Control*. Elsevier Science & Technology, 2015. ISBN 9780080451473. URL <http://store.elsevier.com/Railway-Noise-and-Vibration/David-Thompson/isbn-9780080914435>.
- [Thompson(1950)] W.T. Thompson. Transmission of elastic waves in plane infinite structures. *Journal of Applied Physics*, 21 :89–93, 1950.

- [Vanstraelen(2013)] M. Vanstraelen. Cargovibes wp3.3 trench isolation : modelling and measurements cfr. the test bench. Technical report, 2013. URL <http://www.cargovibes.eu/>.
- [Ventsel and Krauthammer(2001)] E. Ventsel and T. Krauthammer. Thin plates and shells : Theory : Analysis, and applications. Technical report, 2001. URL <https://www.crcpress.com/product/isbn/9780824705756>.
- [Verbraken et al.(2012)] Verbraken, Lombaert, and Degrande] H. Verbraken, G. Lombaert, and G. Degrande. Experimental and numerical prediction of railway induced vibration. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 13(11) :802–813, 2012. doi : 10.1631/jzus.A12ISGT8. URL <http://www.springerlink.com/index/10.1631/jzus.A12ISGT8>.
- [Villot et al.(2011)] Villot, Ropars, Jean, Bongini, and Poisson] M Villot, P Ropars, P Jean, E Bongini, and F Poisson. Modeling the influence of structural modifications on the response of a building to railway vibration. *Noise Control Engineering Journal*, 59(6) :641–651, 2011. URL <http://www.ingentaconnect.com/content/ince/ncej/2011/00000059/00000006/art00008>.
- [Vostroukhov and Metrikine(2003)] A.V. Vostroukhov and A.V. Metrikine. Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track. *International Journal of Solids and Structures*, 40(21) :5723–5752, 2003. doi : 10.1016/S0020-7683(03)00311-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303003111>.
- [Vouffo(2011)] P.K. Vouffo. *Modélisation de l'interaction d'un sol semi-infini et d'une dalle en flexion*. Acouphen - INSA Lyon, 2011.
- [Wallace(1972a)] C.E. Wallace. Radiation resistance of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3) :946–952, 1972a. doi : 10.1121/1.1912943. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/51/3B/10.1121/1.1912943>.
- [Wallace(1972b)] C.E. Wallace. Radiation resistance of a baffled beam. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3) :936–945, 1972b. doi : 10.1121/1.1912942. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/51/3B/10.1121/1.1912942>.
- [Wathelet(2005)] M. Wathelet. *Array recordings of ambient vibrations : surface-wave inversion*. PhD thesis, Université de Liège, 2005.



FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : GRAU	DATE de SOUTENANCE : 15/12/2015
Prénoms : Loïc	
TITRE : Approche analytique modale pour la prévision vibratoire de plaques couplées à des sols: Applications ferroviaires	
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : AAAAISALXXX
Ecole doctorale : MEGA	
Spécialité : Acoustique	
<p>RESUME : Ce travail de thèse présente la formalisation du problème de couplage d'une plaque en vibration de flexion avec le sol. La notion d'impédance intermodale de rayonnement vibratoire est définie de façon analogue à son équivalent acoustique. A partir de cette définition, la notion de masse, raideur et amortissement modal ajoutée sur la structure par le sol est introduite. L'effet sur le niveau vibratoire de la structure est présenté, notamment l'effet très amortissant du sol sur la structure. Une comparaison avec le modèle équivalent acoustique est présentée avec une attention particulière portée sur les différences entre les impédances intermodales. L'influence de la stratification sur le niveau vibratoire de la structure fait apparaître des phénomènes nouveaux sur la partie imaginaire de l'impédance intermodale. Une comparaison théorie-expérience a été effectuée dans le cas d'une dalle de tramway couplée au sol. On présente également une comparaison avec un code numérique, MEFISSTO développé par P. Jean au sein du CSTB.</p> <p>On présente également une extension du modèle d'une plaque couplée au sol au cas de couplage de deux plaques avec le sol. On montre notamment que l'écriture du problème reste très similaire au problème d'une plaque couplée au sol. Les impédances intermodales peuvent encore être définies avec la prise en compte du couplage des modes d'une plaque sur les modes de l'autre plaque. On présentera trois applications de ce modèle. La première concerne l'utilisation d'une Barrière Vibratoire Horizontale à la surface du sol pour atténuer les vibrations issues d'une première plaque modélisant la dalle de tramway.</p> <p>Finalement une ouverture du problème de couplage d'une plaque avec le sol par l'utilisation de ce modèle dans des problématiques inverses est présentée. On montre qu'il est possible par un problème inverse de remonter aux efforts injectés sur une dalle de tramway au passage de celui-ci.</p> <p>MOTS-CLÉS : Vibrations, Equations Navier, Analyse modale, Flexion, Couplage sol-structure, Couplage fluide-structure, Barrière Vibratoire Horizontale</p> <p>Laboratoire de recherche : Laboratoire Vibrations et Acoustique</p> <p>Directeur de thèse: Bernard Laulagnet</p> <p>Président de jury : Alain le Bot</p> <p>Composition du jury : François Gautier, Philippe Jean, Goran Pavic, Pierre-Etienne Gautier.</p>	